Кратка Теория на Вѣроятностьта.

Отъ
Хр. Д. Балтаджиевъ
(Учитель при Държавната реална Гимназия „Александръ I^{ви}“).

~—o—~

Принадлежи на:
....
ученикъ отъ VII класъ.

Пловдивъ
1890 г.

Алгебра.

Теория на вѣроятностьта.

Вѣроятноститѣ за прости събития.

§ 1.

Всичко което се извършва въ природата се казва явление. Всѣко явление привожда къ много случаи; въ нѣкои отъ тѣзи случаи появява се едно събитие, въ други – друго. Да прѣдположимъ, напр. че ний изваждаме топче изъ азда, която съдържа десеть бѣли и двѣ черни топчета; при това явление могѫтъ да бѫдѫтъ дванадесеть случаи, – то е появяването на всѣко топче; въ десетѣхъ отъ тѣзи случаи ний наблюдаваме едно и сѫщо събитие, това е появяването бѣлото топче, въ двата други случая ний наблюдаваме появяването черното топче. Какъ-то числото на случаитѣ, тъй и числото на събитията въ различнитѣ явления могѫтъ да бѫдѫтъ, каквл и да е числа, като конечни тъй и безконечно велики.

Ако ли ~~нея~~ сѫ ни извѣстни причинитѣ (силитѣ), които управляватъ даденото явление сѫщо ни сѫ извѣтия условията при които се започва явлението то ний можемъ по напрѣдъ да прѣдскажемъ, какъ ще произлиза явлението, какъвъ случай ще послѣдва за какъвъ и кое събитие ще се случи по напрѣдъ и кое отпослѣ. Тъй напримѣръ намъ ни сѫ извѣстни силитѣ, които дѣйствуватъ на свободно падающето тѣло, за това, ако знаемъ началното положение, величината и направлението на началната скорость, то можемъ да прѣдскажемъ въ кое мѣсто ще се намѣри тѣлото, слѣдъ като се измине извѣстно врѣмя. Но има твърдѣ много такива явления влияющитѣ причини, на които намъ сѫ неизвѣстни; относително такива явления ний неможемъ да кажемъ, какъ тѣ ще произлизатъ и какви събития ще се появатъ по напрѣдъ и какви отпослѣ; такива явления ний наричаме непостоянни явления, събитията, къмъ които привождатъ тия явления се наричатъ случайни събития. Къмъ разряда на случайнитѣ събития се отнасятъ, напр. всичкитѣ събития отъ социалния свѣтъ, какъ-то: пожаръ, прѣступление, смъртность, раждание, печаба, загуба, намаление или повишение курса на ~~ценнитѣ~~ ценни книжа и много други. Като разглѣдаме внимателно нѣкое непостоянно явление, ний забелѣзоваме, че на него дѣйствуватъ два рода причини: първо причини промѣнливо, които дѣйствуватъ, ту тъй, ту инакъ, и въ дадения случай не е възможно да опрѣделимъ кои отъ промѣнливитѣ причини дѣйствуватъ на явлението и какъ; второ причини постоянни, които дѣйствуватъ на събитието по извѣстенъ и опрѣдѣленъ начинъ. Тъй напр. въ взетия погорѣ примѣръ, появяванието на топчето изъ сѫдътъ промѣнливи причини сѫ: това или онова расположение на топчетата въ сѫдътъ, тъй или онуй движение на рѫката, която изважда топчето; постоянна причина е количеството на топчетата, отъ всѣка боя или цвѣтъ въ сѫдътъ. Да вземемъ още другъ примѣръ: Да прѣдположимъ, че ний желаемъ да опрѣделимъ температурата въ дадения часъ и день за въ идущата година. Промѣнливитѣ причини, които влиятъ на това събитие сѫ: направлението на вѣтърътъ, влажностьта, налягането на въздуха и други; постояннитѣ пъкъ причини сѫ: слънчевата топлина географическото положение, устройството повърхнината на даденото мѣсто. Въ сила влиянието на промѣнливитѣ причини едно отъ събитията се случва порано а другото отъ резултада някъ на дѣйствията на постояннитѣ причини се заключава въ това, че едно отъ събитията се появява по често отъ другото или както казватъ едното събитие е по-вѣроятно отъ другото. Тъй напр. отъ този фактъ, че бѣлитѣ топчета въ сѫдътъ сѫ десятъ, а чернитѣ двѣ ний заключаваме, че появяването на бѣлото топче е по вѣроятно отъ появяването на черното. Лесно се увѣряваме изобщо, че отъ двѣ събития при едно и сѫщо явление, това е по вѣроятно, на което благоприятствува по голѣмо число случаи.

Да разгледаме още двѣ еднородни явления напр. появяването на топчето отъ два сѫда; да прѣдположимъ, че въ първия сѫдъ сѫ десять бѣли и двѣ черни топчета, въ втория десять бѣли и петь черни топчета. Въ тѣзи двѣ явления числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ за появяването на бѣлото топче е еднакво и е равно на десять, но отъ туй обстоятелство, че въ първия сѫдъ всичкитѣ топчета сѫ по малко отъ колкото въ втория, ний заключаваме, че появяванието на бѣлото топче отъ първия сѫдъ е по вѣроятно отъ появяванието на бѣлото топче отъ втория сѫдъ. Въобще при едно и сѫщо число благоприятни случаи, вѣроятностьта на събитието е толкова по-голѣма, о колкото е по-малко числото на всичкитѣ възможни случаи.

Отъ всичкото горѣказано ний дохождаме къмъ слѣдующето опрѣделение вѣроятноститѣ на събитията: Вѣроятностьта на събитието е отношението отъ числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на очакваното събитие, къмъ числото отъ всичкитѣ възможни случаи.

Тъй напр. ако имаме единъ азъ съ десять бѣли и двѣ черни точкета, то вѣроятностьта за появяването на бѣлото точке е $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ а вѣроятностьта за появяването на черното точке е $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Изобщо ако ли m е числото на всички възможни случаи при даденото явление и n е числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на събитието, то вѣроятностьта на събитието се изразява отъ дробьта $\frac{n}{m}$. Отъ това опрѣделение слѣдва, че вѣроятностьта на събитието е всѣкога правилна дробь. Крайнитѣ значения за вѣроятноститѣ на събития сѫ нула и единица. Дробьта $\frac{n}{m}$, която изразява вѣроятностьта на нѣкое събитие се обръща въ нула, ако ли $n=0$, т.е.

ако ли нѣма нито единъ случай благоприятенъ на очакваното събитие; но при такъвъ случай очевидно че събитието нѣма да се случи.

Вѣроятностьта на събитието или $\frac{n}{m}$ равна на единица, тогава, когато $n = m$, т. е. ако ли всичкитѣ случаи сѫ благоприятни на очакваното събитие; но при такова условие явлението очевидно допуща само едно събитие, което непрѣменно ще се случи. И така вѣроятностьта нула показва, че събитието нѣма да се случи, вѣроятность единица показва, че събитието е достовѣрно, т. е. непрѣменно ще се случи. Теорията на вѣроятноститѣ се занимава съ непостоянните явления, тя дава правила съ които се опрѣделя точната величина на вѣроятностьта за всѣко случайно събитие.

§ 2.

Да прѣдположимъ, че нѣкое явление приводи къмъ нѣколко събития: A, A', A'', ... Ако ли въ нѣкой случай се появяватъ нѣколко отъ тѣзи събития, то такъво съвокупно стечение на нѣколко събития ний ще считаме за ново сложно събитие; като се условимъ за това ний можемъ да прѣдположимъ, че въ всѣкой случай се появява само едно отъ горѣ казанитѣ събития.

Нѣка $\underline{n}$ е числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на събитието A, n' е числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на събитието A' и т.н. Ако ли означимъ чрѣзъ m числото на всички възможни случаи, то очевидно, $m=n+n'+$ $+n''+\ldots\ldots$ Отъ казаното въ прѣдидущий параграфъ ний заключаваме, че вѣроятноститѣ на събитията $A, A', A''\ldots\ldots$ сѫ изразяватъ съответственно отъ дробитѣ: $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$, ... Лесно ~~ще~~ се убеждаваме, че сумата на тия дроби е равна на единица $\frac{n}{m}+\frac{n'}{m}+\frac{n''}{m}+\ldots=1$. Итъй ний доказдаме къ слѣдующата теорема: Сбора отъ вѣроятноститѣ на всичкитѣ събития при едно и сѫщо явление е равенъ на единица.

§ 3.

Да рѣшимъ сега нѣколко примѣра: Нѣка имаме единъ сѫдъ, който да съдържа a бели, b червени и b черни топчета. При изваждането на едно топче отъ сѫдътъ ний очакваме появяването на едно отъ тритѣ събития, то е появяването на бѣлото черното или червеното топче. При това явление числото на всичкитѣ възможни случаи е равно на числото отъ всичкитѣ топчета, т.е. $a+b+c$; въ $\underline{a}$ случая се появява бѣлото топче, въ $\underline{b}$ случая черното и въ $\underline{c}$ случая червеното.

Отъ тука лесно получаваме, че вѣроятноститѣ за появяванието на бѣлото, черното и червеното топчета сѫ изразяватъ съответствено съ дробитѣ: $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$

Сбора отъ вѣроятноститѣ на тия три събития, което лесно се вижда, е равенъ на единица.

§ 4.

Отъ сѫдъ, който съдържа m бѣли и n черни топчета, изваждаме изваждаме k топчета. Каква е вѣроятностьта, че извадениtѣ k топчета ще бѫдатъ бѣли?

Въ настоящия опитъ числото на всички възможни случаи е равно на числото на комбинациитѣ отъ всичкитѣ $m+n$ топчета по k:

$$C_{m+n}^{k} = \frac{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(m+n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\cdots\cdots k}$$

Числото на случаитѣ, въ които се появяватъ всичкитѣ бѣли топчета е равно на числото на комбинациитѣ отъ всичкитѣ m бѣли топчета по k:

$$C_{m}^{k} = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\cdots\cdots k}$$

Следователно търсената вѣроятность ще се изрази съ дробьта:

$$\frac{C_m^k}{C_{m+n}^k} = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(m+n-k+1)}.$$

§5.

Отъ съдътъ, който съдържа m бѣли и n черни точкета изваждаме най напрѣдъ едно точке и го турѣме на страна, послѣ друго. При това могатъ да се случатъ четири събития: 1) появявание на двѣ бѣли точкета, 2) появявание по напрѣдъ бѣло, ~~появявание по напрѣдъ бѣло~~ и послѣ черно точке, 3) появявание по напрѣдъ черно а послѣ бѣло точке и 4) появявание двѣ черни точкета. Каква е вѣроятността за всѣко събитие?

Въ настоящия ~~въпросъ~~ опитъ ний обрѣщаме внимание на редътъ, въ който се появяватъ точкетата, слѣдователно числото на всички възможни случаи е равно на числото на вариациитѣ отъ всички $m+n$ точкета по двѣ т. е. $(m+n)(m+n-1)$. Числото на случаитѣ, въ които се появяватъ двѣ бѣли точкета е равно на числото отъ вариациитѣ отъ m бѣли точкета по двѣ, т.е. $(m-1)$. Числото на случаитѣ, въ които се появява по напрѣдъ бѣло точке, а послѣ черно е равно на произведението отъ числото на бѣлитѣ на числото отъ чернитѣ, т.е. mn. Толкова ще бъдатъ и такива случаи, въ които се появява по напрѣдъ черно а послѣ бѣло ~~точкета~~. Числото на случаитѣ въ които се появяватъ двѣ черни точкета е равно на числото на вариацийтѣ отъ n черни точкета по двѣ, т. е. $n(n-1)$.

И тъй търсенитѣ вѣроятности сѫ:

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n+1)},\ \frac{mn}{(m+n)(m+n-1)},\ \frac{mn}{(m+n)(m+n+1)}\ и\ \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

Сбора отъ всичкитѣ тѣзи вѣроятности, за което лесно се убеждаваме, е равенъ на единица.

§ 6.

Въ едно ~~пълна~~ пълно тесте карти да считаме туза едно, двойката - двѣ, тройката - три и т. н. момчето, единадесятъ, момичето, дванадесятъ, царя тринадесятъ. Изваждаме една карта отъ тестето и я турчаме на страна, послѣ вадимъ друга, при това ний можемъ да очакваме появяването на три събития: 1) двѣтѣ извадени карти да броятъ еднакво, 2) първата карта да е по голѣма отъ втората и 3) първата карта да е по малка отъ втората. Каква ще бѫде вѣроятностьта за всѣко едно събитие?

Да прѣдположимъ че всичкитѣ видове въ тестето сѫ n, а числото ~~въ~~ всякой единъ видъ $= m$. Ако рѣшимъ задачата въ букви и прѣдположимъ, че $n = 4$, $m = 13$ то ще получимъ отговора за цѣлото тесте карти, които се употрѣбляватъ въ различни игри

Числото на всички тѣхъ възможни случаи е равно на числото на вариацiитѣ отъ всичкитѣ карти, т.е. $m.n$ по двѣ или $mn.(mn-1)$. Числото на случаитѣ, въ които се появяватъ два туза е равно на числото на вариацiитѣ отъ всичкитѣ n туза по два, т.е. $n(n-1)$. Толкова ще бъдътъ случаи въ които се появяватъ двѣ двойки, двѣ тройки и т.н.; слѣдователно числото на случаитѣ въ които се появяватъ двѣ карти равнобройни е равно на $mn(n-1)$

Числото на случаитѣ, въ които първата карта да е тузъ, а втората по-голѣма напр. двойка е равно на произведението отъ числото на всичкитѣ тузове съ числото останали карти, освѣнъ тузоветѣ т.е. $n(mn-n) = n^2(m-1)$. Числото на случаитѣ въ които първата карта да е двойка а втората по голѣма напр. тройка е равно на произведението отъ числото на двойкитѣ съ числото отъ всичкитѣ карти освѣнъ тузоветѣ и двойкитѣ, т.е. $n(mn-2n) = n^2(m-2)$. По сѫщия начинъ ще намѣримъ, че числото на случаитѣ въ които първата карта да е тройка а втората 4=ворка е равно на $n^2(m-3)$ и т.н.

Числото на случаитѣ, въ които първата карта да е по голѣма отъ втората е равно на сбора:
$n^2(m-1)+n^2(m-2)+n^3(m-3)+\dots 3n^2+2n^2+n^2$.
Нъ членоветѣ отъ тази сумѣ образуватъ аритметическа прогресия; сбора на такъва прогресия е равенъ на полусбора отъ крайнитѣ членове умноженъ съ числото на членоветѣ следов. $n^2\{(m-1)+(m-2)+(m-3)+\dots 3+2+1\} = n^2\frac{\{(m-1)+1\}(m-1)}{2}$
или $n^2\{(m-1)+(m-2)+\dots+3+2+1\} = \frac{n^2m(m-1)}{2}$
Толкова ще бѫдатъ и такива случаи въ които първата карта е по малка отъ втората.
И тъй вѣроятноститѣ на тритѣ разглѣдвани събития ще бѫдатъ: $\frac{n-1}{mn-1}$, $\frac{n(m-1)}{2mn-1)}$, $\frac{n(m-1)}{2(mn-1)}$. Като прѣдположимъ сега $n=4$ а $m=13$ ний ще получимъ отговора за пълно тесте карти: $\frac{1}{17}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{8}{17}$.

§ 7.

Въ единъ сѫдъ има m бѣли и n черни топчета, въ други — m' бѣли и n' черни; отъ първия сѫдъ изваждатъ неизвѣстно какъ топче и го турятъ въ втория сѫдъ; каква е вѣроятностьта, че послѣ пакъ отъ втория сѫдъ ще извадатъ бѣло топче?

Да намъримъ най-напрѣдъ числото на възможнитѣ случаи. Първо може да се случи, че точкето което извадихме отъ първия сѫдъ, да го извадимъ пакъ отъ втория сѫдъ; такива случаи ще бѫдѫтъ, толкова, колкото сѫ точкетата въ първия сѫдъ, т. е. $m+n$. Второ може да се случи, че точкето, което извадихме отъ първия сѫдъ, да не извадимъ повече отъ втория сѫдъ, а да вадимъ точкетата, които се намираха въ втория сѫдъ; числото на такива случаи е равно на произведението отъ числото на точкетата които се намиратъ въ I-я сѫдъ съ числото на точкетата които се намиратъ въ II-ия сѫдъ, т. е. $(m+n)(m'+n')$. И тъй числото на възможнитѣ случаи е равно на $m+n+(m+n)(m'+n') = (m+n)(m'+n'+1)$.

Да намъримъ сега числото на случаитѣ, при които изъ втория сѫдъ се появява бѣло точке. Първо може да се случи, че отъ първия сѫдъ да извадимъ бѣло точке, и това сѫщото точке пакъ да излѣзе отъ втория сѫдъ, такива случаи могѫтъ да бѫдѫтъ толкова, колкото бѣли точкета има въ I сѫдъ, т. е. m. Второ може да се случи, че точкето, което е излѣзло отъ I-и сѫдъ да не излѣзе повече отъ II сѫдъ, а вмѣсто него да излѣзе каквода е отъ бѣлитѣ въ него бѣли точкета; числото на такива случаи е равно на произведението отъ числото на вситѣ точета отъ I-я сѫдъ съ числото на всичкитѣ бѣли точета отъ втория сѫдъ т.е. $(m+n)m'$. И тъй числото на всичкитѣ случаи, при които се появява бѣло точе отъ втория сѫдъ е $m+(m+n).m'$. Като раздѣлимъ това число на всевъзможнитѣ случаи, ще получимъ търсената вѣроятность за появяванието на бѣлото точе:

$$\frac{m+(m+n)m'}{(m+n)(m'+n'+1)}.$$

§ 8.

Да разгледаме сега единъ случай, който се рѣшава по способа на прѣдѣлитѣ, т.е. прѣминаваме отъ крайни числа къмъ безкрайно голѣми; при това вмѣсто дадената задача зимаме друга съ крайни числа, рѣшаваме я и послѣ прѣминаваме къмъ безкрайни.

Дѣлимъ правата AB опрѣдѣлена дължина на 3 произволни части (на сполука) каква е вѣроятността, че отъ тѣзи части можемъ да съставимъ Δ=къ?

За насъ всякакви дѣления на правата се прѣдставляватъ равновъзможни, а тъй като такива дѣления могѫтъ да бѫдѫтъ ∞=но много, то и числото на всичкитѣ равновъзможни случаи е ∞-но голѣмо; числото на случаитѣ, които благопріятствуватъ сѫщо ∞=но голѣмо, тъй като можемъ да построимъ ∞=но много ΔΔ=ци съ равни периметри.

Но ний вмѣсто тази задача ще вземемъ друга;
да прѣдположемъ, че нашата права може да се дѣли
въ опрѣдѣлени и извѣстно число точки $2n$ (гдѣто n
е безкрайно голѣмо) пита се каква е вѣроятностьта
на нашето събитие при това условие; да почнемъ
отъ числото на равновъзможнитѣ случаи; най мал-
ката часть, която може да бѫде отдѣлена отъ пра-
вата е $\frac{1}{2n}$ часть. Ако за първата часть вземимъ
I дѣление, то третята часть не може да бѫде по
голѣма отъ $2n-2$ дѣления; ако третята часть
е равна на $2n-2$, то за втората трѣбва да взе-
мемъ 1 дѣление; ако ли III^a часть $= 2n-3$ дѣления
то втората може да бѫде 1 или 2 дѣления, а вели-
чината на първата часть се опрѣдѣля вече отъ тѣ-
зи величини; послѣ ако за III^a часть вземемъ $2n-4$
дѣления, то втората часть може да бѫде 1 или 2
или 3 и т. н. Най послѣ ако III^a часть вземемъ едно
дѣление, то II^a часть може да бѫде $= 1, 2, 3 \ldots (2n-2)$
дѣления. И тъй числото на всевъзможнитѣ случаи
е $1+2+3 \ldots\ldots (2n-2) = \frac{(2n-2)(2n-1)}{2} = (2n-1)(n-1)$. Да на-
мѣримъ сега числото на благоприятнитѣ
случаи; за да благоприятствува нѣкакво си дѣле-
ние на нашето събитие необходимо е щото всѣ-
ка отъ сбора ~~четиритѣ~~ частитѣ на които сме раздѣлили
нашата права AB да бѫде по малка отъ сбора
на другитѣ двѣ части и да е по малка отъ разликата на дру. двѣ части.

Не е мъчно да се увѣримъ, че ни една отъ трите части не може да бѫде по голѣма отъ n, тъй като въ този случай тя ще бѫде равна или по голѣма отъ сбора на останалитѣ двѣ; после всѣка часть трѣбва да бѫде по голѣма отъ единица, защото, ако би, тя да е равна на единица, то тя ще бѫде равна или по малка отъ разликата на другитѣ двѣ. Слѣдов. всѣка часть може да приема значения отъ 2 до $n-1$. Ако ли първата часть $= 1$, то третята може да бѫде само $n-1$, ако ли първата часть $= 2$, то третята може да бѫде или $(n-1)$ или $(n-2)$ и т.н. Най после ако първата часть $=(n-1)$, то третята може да бѫде или $n-1$ или $n-2$ или $n-3$ и т.н. до 2. Слѣдов. числото на благоприятнитѣ случаи е $= 1+2+3+4+\cdots+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Слѣдователно вѣроятността на нашето събитие е $=$

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2(n-1)(2n-1)} = \frac{n-2}{2(2n-1)}.$$

Сега да прѣминемъ отъ тази задача къмъ нашата задача трѣбва да прѣдположимъ $n=\infty$. Но по напрѣдъ да прѣобразуваме малко нашата формула:

$$\frac{n-2}{2(2n-1)} = \frac{n-2}{4n-2} = \left[\frac{1-\frac{2}{n}}{4-\frac{2}{n}}\right]_{n=\infty} = \frac{1}{4}$$

Сега, като заменимъ n съ ∞ ще получимъ:

$$\frac{1-\frac{2}{\infty}}{4-\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{4}$$ И тъй вѣроятностьта е $\frac{1}{4}$

Принципа на сложеното събитие

§9.

Сложно събитие наричаме такъво събитие което се състой въ едно врѣменно появяване на двѣ или нѣколко събития; при това съставни-тѣ събития могатъ да зависятъ едно отъ друго или не. Да разгледаме по напредъ сложно събитие, което се състой отъ въ едно врѣменно появяване на двѣ независими по между си събития и да намѣримъ изражение за вѣроятностьта на ~~А~~ това събитие съ помощьта на вѣроятности-тѣ на съставнитѣ събития; Нека I-то отъ тѣзи събития да се разлага на m равновъзможни случаи отъ които k благоприятствуватъ за появяването му, а II-то на m' равновъзможни случаи, отъ които k' му благоприятствуватъ. Да разгледаме сега съвокупно тѣзи двѣ, като ново събитие; числото на всевъзможнитѣ случаи, които отговарятъ на това събитие сѫ $m.m'$; тъй като всѣки отъ m равновъзможни случаи за първото събитие, комбиниранъ съ всѣки отъ m' равновъзможни случаи за второто събитие се представлява равновъзможенъ. По сжщия начинъ намираме, че числото на благоприятнитѣ случаи за появяването на нашето сложно събитие е $= n n'$ Слѣдователно вѣроятностьта на нашето събитие $= \frac{n n'}{m m'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'}$. Нъ всѣкой отъ тѣзи два множителя изразява (т. е. $\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'}$) вѣроятность на съставното събитие. Слѣдователно вѣроятностьта на сложното събитие е равна на произведението отъ вѣроятноститѣ на съставнитѣ събития, ако ли последнитѣ не зависятъ едно отъ друго.

§ 10.

Да предположимъ сега, че нашитѣ съставни събития зависятъ едно отъ друго и тази зависимость се състои въ това, че появяването или непоявяването на първото влияе по извѣстенъ начинъ на вѣроятностьта на второто.

Нѣка M е числото на всевъзможнитѣ случаи, на които се разлага сложното събитие. Да наречемъ съ m числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на появяването съставнитѣ събития заедно съ m' — числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на появяването само първото събитие и съ m'' — числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ на появяванията само второто събитие. Вѣроятностьта за едновременно появяване нашитѣ двѣ събития, т. е. вѣроятностьта за сложното събитие ще бѫде $\frac{m}{M}$, тази дробь можемъ прѣдстави още така $\frac{m}{M} = \frac{m+m'}{M} \cdot \frac{m}{m+m'}$; тука всѣки отъ тѣзи два множителя има опредѣлено значение именно значение на нѣкаква вѣроятность; и наистина $m + m'$ прѣдставлява събрание отъ всичкитѣ случаи за появяване първото събитие, ще бѫде ли то свързано съ второто или не, затова $\frac{m+m'}{M}$ прѣдставлява вѣроятностьта на първото събитие, разгледовано, като не зависимо; втория множитель $\frac{m}{m+m'}$ прѣдставлява вѣроятностьта за появяването на второто събитие, като прѣдполагаме, че първото вече се е явило. Слѣдователно.

вѣроятностьта за сложното събитие което ся състои въ едновременно появяване двѣтѣ зависими едно отъ друго събития е равна на произведението отъ вѣроятностьта на първото събитие, разглеждано, като независимо и вѣроятностьта на второто събитие исчислена въ предположение, че първото събитие сѫ е вече случило.

Въ изражението $\frac{m+m'}{n} \cdot \frac{m}{m+m'}$ ний можемъ безъ да измѣнимъ величината му, да замѣнимъ m' съ m'', отъ тукъ заключаваме, че вѣроятностьта на сложното събитие не зависи отъ реда, по който произлизатъ съставнитѣ зависими събития.

§ 11.

Да распространимъ сега принципа на сложното събитие за повече отъ двѣ съставни независими събития. Да кажемъ, че имаме три независими едно отъ друго събития, отъ които първото се разбива на m' равновъзможни случаи, второто на m'' — третьото на m'''; нека числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ за появяването на тѣзи събития сѫ съотвѣтственно — n', n'', n'''; цѣлото на (случаитѣ) всевъзможнитѣ случаи, които съотвѣтствуватъ на сложното събитие,

което се състой въ едновременно появяван-
на тѣзи три събития ще бѫде $m'.m''.m'''$, тъй като комбинацията на всякой отъ m' равновъзможни случаи, които съответствуватъ на първото събитие съ всякой отъ m'' равновъзможни случаи, които съответствуватъ на второто събитие и съ всякой m''' равновъзможни случаи, които съответствуватъ на третьото събитие се прѣдставлява равновъзможна.

Отъ тѣзи случаи ще благоприятствуватъ на нашето сложно събитие $n'.n''.n'''$; затова вѣроятността на очакваното събитие ще бѫде: $\frac{n'.n''.n'''}{m'.m''.m'''} = \frac{n'}{m'} \cdot \frac{n''}{m''} \cdot \frac{n'''}{m'''}$

Като разсѫждаме по този начинъ и по-нататъкъ ще получимъ, че:

вѣроятността на сложното събитие, което се състои въ едновременното появяване колкото и да сѫ независими събития е равна на произведението отъ вѣроятностите на тѣзи събития.

§ 12.

Като разглеждаме по сѫщий начинъ, както

по горѣ принципа на сложното събитие, за този случай, когато съставящитѣ събития зависятъ едно отъ друго, ще дойдемъ до слѣдующето заключение: вѣроятностьта на сложното събитие, което се състои въ едновременно появяване на колкото и да са зависящи едно отъ друго съставни събития, е равна на произведението отъ вѣроятностьта на първото събитие, разглеждвано, като независимо, съ вѣроятностьта на второто събитие, изчислена въ прѣдположение, че първото вече се е случило съ вѣроятностьта на третьото събитие исчислено въ прѣдположение, че първитѣ двѣ вече са се случили и т. н. при това рѣда на събитията остава произволенъ.

Тѣзи двѣ теореми ни даватъ възможность да исчислимъ вѣроятность за на сложното събитие, като знаемъ вѣроятноститѣ на съставнитѣ събития.

§ 13.

Да рѣшимъ нѣколко задачи за разяснение доказанитѣ теореми:

А). Въ единъ съдъ има a бѣли и b

черни топчета, въ други — a' бѣли и b' черни. Каква е вѣроятностьта, че при едновременно изваждание отъ всѣки сѫдъ по едно топче извадените топчета ще бѫдѫтъ бѣли?

Тука ний имаме работа съ вѣроятностьта на сложно събитие, което се състой въ едновременно появявание двѣ независими събития; вѣроятностьта на първото събитие е $\frac{a}{a+b}$, вѣроятностьта на второто е $\frac{a'}{a'+b}$, следователно вѣроятностьта на сложеното събитие е $\frac{a\,a'}{(a+b)(a'+b')}$. Такава задача ний рѣшавахме непосрѣдствено.

В). Единъ сѫдъ съдържа a бѣли и b черни топчета. Каква е вѣроятностьта, че ако извадимъ едно топче и слѣдъ него друго извадените топчета ще бѫдѫтъ бѣли?

Тука съставнитѣ събития зависятъ вече едно отъ друго, вѣроятностьта на първото събитие разглеждано, като независимо е $= \frac{a}{a+b}$; ако ли това събитие сѫ е случило, то въ сѫдътъ ще останѫтъ $a+b-1$ топчета, отъ които $a-1$ ще бѫдѫтъ бѣли;

слѣдователно вѣроятността на второто събитие изчислена въ прѣдположение, че първото сѫ е вече случило, е $= \frac{a-1}{a+b-1}$; слѣдователно вѣроятността на нашето сложно събитие е $= \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$.

Подобна задача ний рѣшаваме непосрѣдствено.

c). Единъ сѫдъ съдържа a бѣли и b черни топчета, ний изваждаме наредъ едно слѣдъ друго топчета. Каква е вѣроятностьта, че изваденитѣ топчета ще се наредятъ напримѣръ тъй: бѣло – черно – черно, бѣло – черно – черно и т. н.

Ний тука имаме сложно събитие, което се състои въ едновременно появяване на нѣколко прости събития. Вѣроятността на първото събитие, разгледвано, като независимо е $\frac{a}{a+b}$; вѣроятността на второто събитие изчислена въ прѣдположение, че първото сѫ е вече случило е $\frac{b}{a+b-1}$, третьото — $\frac{b-1}{a+b-2}$, четвъртото — $\frac{a-1}{a+b-3}$ и т. н. слѣдователно търсената вѣроятность е равна на: $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{b-1}{a+b-2} \cdot \frac{a-1}{a+b-3} \cdots$

Д). Единъ съдъ съдържа a-бѣли и b черни топчета, въ други — a' бѣли и b' черни, отъ първия съдъ изваждаме едно топче и го туряме въ втория; послѣ изваждаме едно топче отъ втория съдъ. Каква е вѣроятностьта, че отъ първия съдъ сме извадили бѣло топче, а отъ втория черно?

Вѣроятностьта на първото събитие е $\frac{a}{a+b}$, а вѣроятностьта за изваждането отъ втория съдъ черно топче, въ прѣдположение, че отъ първий съдъ сме извадили бѣло топче е $= \frac{b'}{a'+b'-1}$. Слѣдователно търсената вѣроятность е $= \frac{a \cdot b'}{(a+b)(a'+b'-1)}$.

Принципа за взаимно исключающитѣ ся причини.

§ 14.

Да прѣдположимъ, че за появяването на нѣкое събитие дѣйствуватъ нѣколко причини: първата причина дѣйствува n случая, отъ тѣхъ k благоприятни на очакваното събитие; втората причина дѣйствува n_1 случаи отъ тѣхъ въ k_1 случая се появява нашето събитие и т. н.

Да означимъ съ m числото на всичкитѣ възможни случаи, тогава:

$$m = n + n_1 + n_{11} + \dots\dots$$

Вѣроятностьта на събитието е равна:

$$\frac{k + k_1 + k_{11} + \dots\dots}{m}$$

Тази вѣроятность можемъ да прѣобразуваме към слѣдующия видъ:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{k}{n} + \frac{n_1}{m} \cdot \frac{k_1}{n_1} + \frac{n_{11}}{m} \cdot \frac{k_{11}}{n_{11}} + \dots\dots$$

Като разглѣждаме дробитѣ

$$\frac{n}{m}, \quad \frac{n_1}{m}, \quad \frac{n_{11}}{m}, \dots\dots$$

виждаме, че тѣ сѫ не друго нищо освенъ вѣроятноститѣ на причинитѣ.

Дробьта $\frac{k}{n}$ е вѣроятностьта на събитието въ това прѣдположение, че на него е дѣйствувало само първата причина; защото ако дѣйствува само първата причина, то всичкитѣ възможни случаи могѫтъ да бѫдѫтъ само n, отъ които k случаи благопріятствуватъ за появяванието на очакваното събитие.

Тъй също $\frac{k_1}{n_1}$ е вѣроятность на събитието въ прѣдположение, че за появяванието на това събитие е дѣйствувала втората причина итн. Отъ тука излиза слѣдующата теоремма:

Ако за появяването на събитието дѣйствуватъ нѣколко различни причини, то пълната вѣроятность на събитието е равна на сбора отъ произведенията вѣроятноститѣ за всѣка причина съ вѣроятностьта на събитието исчислена въ това прѣдположение, че казаната причина сама е дѣйствувала за появяването на събитието.

Да нарѣчемъ съ $P_1, P_2, P_3 \dots$ вѣроятноститѣ на причинитѣ, а пъкъ p_1 да е вѣроятностьта на събитието, ако за появяването му дѣйствува само първата причина, p_2 – ако дѣйствува само втората причина и т.н. Отъ доказаното горѣ пълната вѣроятность на събитието е равна на

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4 + \dots$$

§ 15.

Въ единъ съдъ имаме m бѣли и n черни топчета, въ другъ m' бели и n' черни ~ " ~ ; отъ първия съдъ е извадено едно топче неизвѣстенъ цвѣтъ и турнато въ втория съдъ. Каква е вѣроятностьта, че послѣ отъ втория съдъ ще извадимъ бѣло топче?

На появяването бѣлото топче отъ втория съдъ влиянятъ двѣ причини тѣ сѫ излизането на бѣлото топче или черното отъ първия сѫдъ; вѣроятноститѣ на тѣзи причини сѫ: $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$

Ако дѣйствува първата причина, то въ втория сѫдъ ще бѫдѫтъ $m'+1$ бѣли и n' черни топчета; слѣдователно вѣроятностьта за излизането на бѣлото топче отъ втория сѫдъ

$$е = на \quad \frac{m'+1}{m'+n'+1}$$

Ако дѣйствува втората причина, то въ втория сѫдъ ще бѫдѫтъ m' бѣли и $n'+1$ черни топчета; слѣдователно вѣроятностьта за излизането на бѣлото топче, отъ втория сѫдъ е равна на :

$$\frac{m'}{m'+n'+1}.$$

Отъ доказаното въ прѣдидущия § 14 търсената вѣроятность на събитието е равна на:

$$\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m'+1}{m'+n'+1}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m'}{m'+n'+1}.$$

Тази задача ний рѣшаваме вече два-пѫти: веднъжъ съ помощьта на вѣроятностьта за простото събитие и другий пѫть — за сложното събитие. И тъй три различни начина приложени къмъ една и сѫща задача даватъ еднакви рѣшения, което и трѣбваше да очакваме, ако ли всичкитѣ ни доказателства аз строи.

§ 16

Да кажемъ сега, че имаме нѣколко събития, вѣроятноститѣ на които ни сѫ извѣстни. Каква е вѣроятностьта, че едно отъ събитията ще се случи?

Да означимъ съ M числото на всевъзможнитѣ случаи, на които се разбива нашето събитие, а съ n', n'' ..... числата на случаитѣ, които благоприятствуватъ за появяванието на събитията напр. A, B, C ...... тогава числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ за появяванието на ~~събитията~~ нашето) е $=$ $= n' + n'' + n'''$ ......; слѣдователно вѣроятностьта на нашето събитие е равна на:

$$\frac{n'+n''+n'''+\ldots}{M} = \frac{n'}{M} + \frac{n''}{M} + \frac{n'''}{M} + \ldots\ldots$$

но $\frac{n'}{M}$, $\frac{n''}{M}$ сѫ вѣроятноститѣ на събитията A, B, C ....; слѣдователно, вѣроятностьта за появяването на нѣкое отъ събитията, които иматъ опрѣдѣлена (извѣстна) вѣроятность, е равна на сбора отъ вѣроятноститѣ на тѣзи събития.

Ако ли събитията A, B, C.... взаимно се изклю чаватъ, то вѣроятностьта за появяването едно отъ тѣхъ е $=1$ и слѣдователно:

сбора отъ вѣроятноститѣ на нѣколко взаимно исключающися събития е равенъ на единица.

Напримѣръ ако вземемъ определено събитие то появяването му и не появяването му ще бѫдатъ събития взаимно исключающися, слѣдователно сбора отъ вѣроятноститѣ за появяването на определеното събитие е равенъ на 1.

§ 17.

Въ единъ сѫдъ имаме a бѣли, b черни и c червени топчета. Каква е вѣроятностьта че ще се яви бѣло топче?

Вѣроятностьта за появяването на черното или червеното топчета е равна на сбора отъ вѣроятноститѣ на тѣзи събития, т. е. $= \frac{b+c}{a+b+c}$; но бѣлото топче може да се яви или не въ двата случая, затова вѣроятностьта за не излизането на бѣлото топче е равносилна на излизането черното или червеното топчета, т. е. $\left(\frac{b+c}{a+b+c} = 1 - \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{a}{a+b+c}\right)$ равна на единица минусъ вѣроятностьта, че бѣлото топче, ще излѣзе, което се и разбира, тъй като появяванието на бялото топче съ събития взаимно немогающия.

§ 18.

Да ръшимъ сега по обща задача. Да кажемъ, че нъкой опитъ привожда ни къмъ събитието A и нека въроятностьта на това събитие се изменява при всъки опитъ: При първия опитъ да е p_1 при втория – p_2 и т. н. повтаряме опита до тогава, до като събитието A се случи. Каква е въроятностьта че събитието A ще се случи при числото на опититъ, което не надминава n?

Събитието A може да се случи при първия опитъ, или при втория, третия и т. н., или най после при n = тий опитъ; въроятноститъ на тъзи събития сж: p_1, $(1-p_1)p_2$, $(1-p_1)(1-p_2)p_3$ ..... $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$ .... $(1-p_{n-1})p_n$ (втората, третята и т. н. сж въроятности на сложното събитие) Като съберемъ тъзи изражения отъ доказаното въ предидущий §, ще получимъ въроятность, че ще сж случи едно отъ тъзи събития.

$$p_1+(1-p_1)p_2+(1-p_1)(1-p_2)p_3+\dots+(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_{n-1})p_n$$

За да определимъ тази сума, полагаме $(1-p_s)=Q_s$

(дѣто индекса s се измѣнява отъ 1 до $\underline{n}$), тогава: $p_1 + (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_3 + \cdots + (1-p_1)(1-p_2)\cdots (1-p_{n-1})p_n = (1-Q_1) + Q_1(1-Q_2) + Q_1 Q_2 (1-Q_3) + \cdots + Q_1 Q_2 Q_3 \cdots Q_{n-1} Q_n = 1 - Q_1 Q_2 Q_3 \cdots Q_{n-1} Q_n = 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \cdots (1-p_{n-1})(1-p_n)$

Сѫщия резултатъ ще получимъ отъ слѣдующитѣ съображения. Вѣроятностьта, ч на нашето събитие не ще да се появи нито при единъ отъ тѣзи n опити е $(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_{n-1})(1-p_n)$ тъй като това е вѣроятностьта на сложено събитие, което се състой въ едновременно не появяване нашето събитие въ всичкитѣ n пѫти. Но непоявяването на нашето събитие, нито въ единъ отъ n=тѣ (опити) пѫти и появяването му въ продължение на числото на опититѣ, което не прѣвишава n сѫ събития взаимно изключающия; слѣдователно търсената вѣроятность е равна на $1 - \{(1-p_1)(1-p_2) \cdots (1-p_{n-1})(1-p_n)\} = 1 - (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$

Въ частенъ случай, когато вѣроятностьта на събитието A не сѫ измѣнява, тогава вѣроятностьта, че събитието A ще се случи при числото на опититѣ, което не прѣвишитава п ще бѫде равна на:

$$1-(1-p)^n$$

§ 19.

Едно събитие сѧ е случило подъ действието на нѣколко взаимно исключающи сѧ причини. Каква е вѣроятностьта, че при това е имала мѣсто една опредѣлена отъ нашитѣ взаимно изключающитѣ сѧ причини?

Нѣка вѣроятноститѣ на взаимно исключающитѣ сѧ причина бѫдѫтъ P_1, P_2, P_3 .... P_n, а вѣроятноститѣ, които се даватъ отъ тѣзи причини на нашето очаквано събитие сѫ: Q_1, Q_2, Q_3 ..... Q_n. Ний ще разглѣдаме едно събитие, което се състои въ едновременно появяване I-та причина и очакваното събитие. Вѣроятностьта на такова събитие както видѣхме по горѣ е равна на произведението отъ вѣроятностьта на I-то събитие разглѣдвано, като независимо съ вѣроятностьта на второто исчислена въ предположение, че първото е имало мѣсто при това редътъ на събитията остава произволенъ. Тази произволность на редътъ на събитията ни даватъ възможность да смѣтавимъ двѣ изражения за нашето сложно събитие; като приравнимъ тѣзи изражения едно на друго ще получимъ теоремата на <u>Бейса</u>. И тъй да предположимъ, че по напредъ е имала мѣсто първата причина, а послѣ очакваното събитие, тогава вѣроятността на сложното събитие ще бъде $P_1 Q_1$, ако ли сега предположимъ, че очакваното събитие е имало мѣсто по напредъ, а послѣ причината, то вѣроятността на сложното събитие ще бъде равна на вѣроятността на очакваното събитие, разглеждано, като независимо, умножено съ вѣроятността на първата причина изчислена въ предположение, че очакваното събитие е имало вече мѣсто.

Но вѣроятността на очакваното събитие, като го разглеждаме, като независимо е = $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 + \dots\dots P_n Q_n$; за това ако означимъ чрезъ x вѣроятността на I-та причина исчислена въ предположение, че събитието имало мѣсто, то вѣроятността на нашето сложено събитие, което се състои въ едновремено появяване I-та причина и очакваното събитие ще бъде $x\,(P_1 Q_1 + P_2 Q_3 +$

$P_3 Q_3 + \dots\dots + P_n Q_n) = P_1 Q_1$

Отъ тука $x = \frac{P_1 Q_1}{P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \dots P_n Q_n} = \frac{P_1 Q_1}{\sum_{s=1}^{s=n} P_s Q_s}$

По сжщия начинъ ще намѣримъ, че вѣроятностьта за нѣкоя си p'та причина, че тя е имала мѣсто за появяването на случилото събитие е $= \frac{P_p Q_p}{\sum_{s=n}^{s=n} P_s Q_s}$

Слѣдователно теоремата на Бейса се състои въ това, че ако имаме събитие, което зависи отъ нѣколко взаимно исключающи ся причини, то вѣроятностьта, че при появяването на това събитие е имала мѣсто нѣкоя определена отъ взаимно исключающитѣ ся причини е равна на произведението отъ вѣроятностьта на тази причина съ вѣроятностьта, която се дава на нашето събитие отъ тази причина, делена съ сбора отъ такива произведения взети за всѣка причина.

Тъй като въ изразенията на вѣроятностьтѣ за всичкитѣ причини знаменателитѣ сѫ равни то оказва се, че тази причина ще бѫде по вѣроятна, на която произведението $P_p Q_p$ ще бѫде най голѣмо. Ако ли $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n$, то вѣроятностьта на p-тата причина ще бѫде:

$$\frac{P Q_p}{\Sigma P Q_p} = \frac{Q_p}{\Sigma Q_p}.$$

(гдѣто знака Σ се распростира на θ отъ 1 до n, т. е. колкото сѫ причинитѣ) и слѣдователно тази причина ще бѫде най вѣроятна която дава на очакваното събитие най голѣма вѣроятность.

§ 20.

Да рѣшимъ единъ примѣръ за разяснение доказаната теорема.

Имаме нѣколко сѫдове; въ $I^{\text{ия}}$ отъ тѣхъ има a_1 бѣли и b_1 черни топчета, въ $II^{\text{ия}}$ a_2 бѣли и b_2 черни топчета, и т. н.

Ние изваждаме едно топче на сполука и при това пакъ на сполука пущаме си рѫката въ нѣкой отъ сѫдоветѣ; извадено то топче е бѣло. Каква е вѣроятностьта, че топчето е извадено отъ $I^{\text{ия}}$ сѫдъ?

Тука имаме събитие, което произлиза подъ влиянието на нѣколко взаимно изключающи сѧ причини; тѣзи причини сѫ: появяването на топчето отъ I сѫдъ, отъ $II^{\text{я}}$ и т. н.; вѣроятностьта за всѣко отъ тѣзи причини е $= \frac{1}{n}$, ако ли n е числото на сѫдоветѣ; затова, като приложимъ теоремата на Вейса, намирамѣ, че търсената вѣроятность

$$e = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{a_1}{a_1+b_1}}{\sum\frac{1}{n}\cdot\frac{a_1}{a_1+b_1}} = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{a_1}{a_1+b_1}}{\frac{1}{n}\sum\frac{a_1}{a_1+b_1}} = \frac{\frac{a_1}{a_1+b_1}}{\sum\frac{a_1}{a_1+b_1}}$$

Знаменателя на тази дробь можемъ представи така $\frac{1}{1+\frac{b_1}{a_1}}$. Отъ тука виждаме, че отъ вѣроятности-тѣ на причинитѣ, най голѣма ще бѫде таз, която съответствува на сѫдътъ, гдѣто отношението отъ числото на чернитѣ топчета къмъ числото на бѣлитѣ бѫде най малко. Ако всичкитѣ сѫдове съдържатъ едно и сѫщо число топчета, т. е. ако $a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 = \ldots\ldots a_n+b_n$, то вѣроятностьта на първата причина ще бѫде равна на:

$$\frac{\frac{a_1}{a+b}}{\sum\frac{a_2}{a+b}} = \frac{\frac{1}{a+b}\cdot a_1}{\frac{1}{a+b}\sum a_2} = \frac{a_1}{\sum a_2}$$

, т. е. вѣроятностьта че топчето е извадено отъ I сѫдъ е равна на отношението отъ числото на бѣлитѣ топчета къмъ числото на всичкитѣ бѣли топчета.

§ 21

Вѣроятность изчислена отъ наблюдения.

Теоремата на Бейса ще ни послужи за рѣшението на слѣдующата задача: Имаме двѣ събития на които дѣйствуватъ нѣколко взаимно исключающи ся причини, вѣроятноститѣ на които сѫ $p_1, p_2, p_3, p_4 \dots p_n$ двѣтѣ събития произлизатъ подъ влиянието на една и сѫща причина; първото събитие сѫ е случило, но не извѣстно подъ дѣйствието на коя причина. Каква е вѣроятностьта, че подиръ туй ще се случи второто събитие?

Този родъ вѣроятности се наричатъ вѣроятности изчислени отъ наблюдения. вѣроятности à posteriori

Да предположимъ, че нашитѣ причини даватъ на първото събитие вѣроятности $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ а на второто — вѣроятности $q_1', q_2', q_3' \dots q_n'$. Търсената вѣроятность можемъ да разглѣдваме, като вѣроятность на събитие, което произлиза подъ влиянието на нѣколко взаимно исключающи ся причини, при това трѣбва да помнимъ, че първото събитие сѫ е случило и че слѣдователно вѣроятноститѣ на причинитѣ не ще бѫдѫтъ вече $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$, а $\frac{p_1 q_1}{\sum p_s q_s}$, $\frac{p_2 q_2}{\sum p_s q_s}$, $\frac{p_3 q_3}{\sum p_s q_s}$, $\dots$ $\frac{p_n q_n}{\sum p_s q_s}$, за това търсената вѣроятность ще бѫде:

$$\frac{p_1 q_1}{\sum p_s q_s} q_1' + \frac{p_2 q_2}{\sum p_s q_s} q_2' + \dots + \frac{p_n q_n}{\sum p_s q_s} q_n' = \frac{\sum p q q'}{\sum p q}.$$

§ 22.

Вѣроятностьта за бѫдѫще събитие исчислена отъ наблюдения.

Да положимъ, че при нѣкой опитъ ний наблюдаваме появяването на просто или сложно събитие A вѣроятностьта на което исчислена непосрѣдствено е равна на p. Като свършимъ това наблюдение ний желаемъ да опрѣделимъ вѣроятностьта на нѣкое си бѫдѫще събитие B.

Да намѣримъ търсимата вѣроятность на събитието B съ q. Ако ли ний чрѣзъ r означимъ вѣроятностьта на сложното събитие AB исчислена **непосрѣдствено**, то по принципа на сложното събитие, тази вѣроятность е равна на вѣроятностьта на събитието A умножена съ вѣроятностьта на събитието B изчислена въ прѣдположение, че събитието A вече сѫ е случило т.е.

$$r = p.q \quad \text{и отъ тука}$$

$$q = \frac{r}{p}.$$

следователно вероятностьта на бѫдѫщето събитие е равна на вероятностьта на сложеното събитие, което се състои отъ наблюденото и бѫдѫщето исчислена непосрѣдствено раздѣлена на вѣроятность на наблюдаваното събитие, сѫщо исчислена непосрѣдствено.

§ 23.

За употреблението на вѣроятностьта.

За математическата надежда.

Ако захванемъ нѣкое прѣдприятие, то отъ него можемъ да очакваме или печалба или загуба; при това печалбата може да бѫде пълна и непълна, т. е. отъ части или ~~отъ~~ как-то казватъ вѣроятно е, че ще спечелимъ; въ първия случай ний сме сигурни, че ще спечелимъ, а въ втория не съвсемъ, за това, ако нарѣчемъ пълната печалба съ K, то нейната вѣроятность, ще бѫде 1, а не пълната; или вѣроятната печалба съ δ и нейната вѣроятность съ p. получаваме:

$$\delta : K = p : 1 \; ; \text{ отъ тука } \delta = Kp.$$

т. е. вѣроятностьта печалба е равна на произведението отъ пълната печалба съ вѣроятностьта, че ще спечелимъ тази печалба;

тази вѣроятность или произведение се нарича математическа надежда на печалбата.

Напр. Двама се хванали на басъ. Ако първия извади отъ съдътъ, който съдържа 4 бѣли и 6 черни топки, бѣло топче ще получи 2 лева, Каква е математическата надежда?

Тъй като вѣроятностьта p, да извади бѣло топче е $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, то математическата му надежда е $\delta = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$.

§ 24.

За игритѣ изобщо.

Подъ думата игра разбираме всякитѣ онези предприятия, въ които съ малки вносове искаме да спечелимъ много. Къмъ такива предприятия се отнасятъ разни лотарии, игри съ топчета (кегли) или зарове (табла), книги, усигорявание на живототъ, на капиталътъ или доходътъ и др. играчътъ или купувачътъ взима за известно количество пари известна надежда, че при случай ще изиграе или спечели опредѣлена сума. Нъ за справедливостьта между играющитѣ трѣбва да влиза въ сила правилото: вносъ да е равенъ на математическата надежда.

§ 25.

За доказателство на горнето правило да разгледаме слѣдующето: да положимъ, че ний захващаме нѣкакво прѣдприятие при извършванието на което могжтъ да се случатъ събития:

$$A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots\ldots \quad и \quad B_1,\ B_2,\ B_3 \ldots\ldots$$

Да кажемъ сега, че нашето прѣдприятие при появяванието на събитията $A_1, A_2 \ldots$ ще донесжтъ печалби: $a_1, a_2 \ldots$ а при появяванието събитията $B_1, B_2 \ldots$, загуби: $b_1, b_2 \ldots$. Отъ тѣзи дадени трѣбва да се опрѣдѣли изгодно ли е нашето прѣдприятие.

Да прѣдположимъ, че ний извършихме нашето прѣдприятие m пъти нѣка числата, които показватъ, колко пъти събитията $A_1, A_2 \ldots$ и B_1, B_2 сѫ се случили, сѫ: $n_1, n_2 \ldots\ \ k_1, k_2$.

Отъ тука много лесно се увѣряваме, че печалбата x получена при нашето прѣдприятие е равна: на $x = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots - b_1 k_1 - b_2 k_2 \ldots$

Ако ли сега раздѣлимъ получената печал-
ба на числото, което показва колко пѫти
сме повторили опита, то ще получимъ
тъй нарѣчената срѣдня печалба. т. е.

$$x = a_1 \frac{n_1}{m_1} + a_2 \frac{n_2}{m} + \cdots - b_1 \frac{k_1}{m} - b_2 \frac{k_2}{m} \cdots$$

но дробитѣ $\frac{n_1}{m}, \frac{n_2}{m}, \cdots \frac{k_1}{m}, \frac{k_2}{m} \cdots$

ни прѣдставляватъ вѣроятноститѣ на
печалбитѣ или загубитѣ, заради туй, като
ги нарѣчемъ съ $p_1, p_2, p_3 \cdots q_1, q_2, q_3$
получаваме: $x = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots b_1 q_1 - b_2 q_2 \cdots$
тъй нарѣчената печалба срѣдня, която е
равна на сбора отъ произведенията в всѣка
печалба съ вѣроятността да получимъ
тази печалба безъ сбора отъ произведенията
всѣка загуба съ вѣроятността да получимъ
тази загуба.

Срѣдната печалба се нарича срѣдня
математическа надѣжда.

Ако ли сега срѣдната математическа
надѣжда е положителна, то прѣдприя-
тието е износно въ противенъ случай е неизносно
Ако ли срѣдната математическа печалба е = нула
то прѣдприятието ако произлиза между двама
или повече души е (~~безобидно~~) безобидно

§ 26.

Да прѣдположимъ, че нѣколко души играчи захващатъ да играятъ. Всѣки играчъ ся туря една опрѣделена (ставка) сума пари, послѣ тази, отъ тѣхъ, който изиграе партията печели всичкитѣ суми. Като прѣдположимъ, че шансоветѣ на играчитѣ сѫ не еднакви, то какви трѣбва да бѫдятъ ставкитѣ на играчитѣ за да бѫде играта безобидна за всѣкиго отъ тѣхъ?

Нѣка вѣроятностьта, че всѣки отъ играчитѣ ще спечели партията сѫ: $p, q, r\ldots\ldots$, ставкитѣ имъ сѫ $a, b\ c \ldots\ldots$ а тѣхната обща ставка $M = a+b+c+\ldots\ldots$ Да прѣдположимъ, че за по голѣма общность, че играта допуща разиграване т.е. че всѣки играчъ получава обратно своята ставка, нѣка u е вѣроятностьта на разиграването.

Да ~~[illegible]~~ изчислимъ математическата надежда на всѣки играчъ. Този играчъ може да спечели партията, или да я изгуби, или пъкъ може да се случи разиграване; вѣроятноститѣ на тѣзи събития сѫ: p, $1-p-u$, и, Въ първия случай играча печели $M-a$ въ втория губи a, въ третия нито губи нито печели; математическата надѣжда за първия играчъ е равна на $(M-a)p-(1-p-u)a+0.u$. За безобидность на играта трѣбва математическата надѣжда да е равна на нула т. е:

$(M-a)p-(1-p-u)a+0.u=0$ отъ тука $a=\frac{Mp}{1-u}$.

Тъй сѫщо получаваме, че

$$b=\frac{Mq}{1-u} \quad \text{и} \quad c=\frac{Mr}{1-u} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Отъ тука слѣдва, че за безобидността на играта ставкитѣ на играчитѣ да бѫдатъ пропорционални на вѣроятноститѣ да спечелятъ партията.

т. е. $a:b:c:\ldots\ldots=p:q:r:\ldots\ldots$

Слѣдствие. Когато играта недопуща разигравание, тогава имаме, че

$$a=Mp\,,\ b=Mq\,,\ c=Mr\ \ldots\ldots$$

но Mp, Mq, Mr ..... сѫ математическитѣ надежди, отъ тука слѣдва правилото закупуване лозове т. е. купувача плаща толкова, на колкото е равна математическата му надѣжда да спечели лоза.

§ 27

Тъй като въ формулата $a = pM$. M съдържа и вноса; то абсолютната печалбата $M' = M - a$ или $M' = M - pM = M(1-p)$ и тъй като $1-p = q$, т.е. на обратната печалба, то $M' = Mq$

т.е. абсолютната печалба е равна на сбора отъ вносоветъ умноженъ на обратната вѣроятность.

Напр. Една лотария съдържа 19 празни билети и само единъ билетъ печелющи 20 лева; всѣки билетъ струва 1 левъ. Каква е нашата абсолютна печалба, ако го спечелимъ?

Понеже $p = \frac{1}{20}$, $M = 20$, $q = \frac{19}{20}$, то

$$a = \frac{19}{20} \cdot 20 = 19.$$

т.е. ако спечелимъ трѣбва да получимъ 19 лева въ противенъ случай губимъ единъ левъ.

§ 28.

За усигуряването на животътъ

Едва недавна захванаха да усигуряватъ живота на хората. За таз цѣль се образуваха особени дружества, които се основоваха на вѣроятностьта, че извѣстно лице ще доживѣе, ~~извѣстно лице ще доживѣе~~ извѣстно число години. Такава вѣроятность се опредѣля отъ таблицитѣ за смъртностьта. Въ тѣзи таблици е забелѣзано, колко души отъ колко до колко доживѣватъ до извѣстна възрасть.

Такива таблици имаме на стр. 154 отъ А. В. Шоурекови логаритм. таблици и се състоятъ отъ двѣ графки. Въ първата отъ тѣхъ означена съ n сѫ турнати годинитѣ на лицата, а въ втората означена V_n сѫ турнати числа, които показватъ колко души доживяватъ тази възрасть. Тѣзи таблици сѫ съставени отъ Deparcieux, който брои отъ 10000 новородени, колко доживяватъ извѣстна възрасть и Milnes-Carlisle — отъ 1000.

§ 29.

Съ помощьта на таблицитѣ се рѣшаватъ слѣдующата задача: Каква е вѣроятностьта че едно лице на n годишна възрасть ще живѣе още 1, 2, 3, 4 ····· r години. Отъ таблицитѣ виждаме, че n-годишна възрасть достигатъ V_n души. Понеже всичкитѣ тѣзи V_n души могатъ да достигнатъ $n+r$ годишна възрасть, то слѣдователно всевъзможнитѣ случаи сѫ V_n. Да ~~означимъ~~ исчислимъ сега благоприятнитѣ.

Споредъ таблицитѣ достигатъ $n+r$ годишна възрастъ само v_{n+r}; за това търсената вѣроятность е: $P_r = \frac{v_{n+r}}{v_n}$

Напримѣръ. Каква е вѣроятностьта, че едно лице на 31 годишна възрастъ ще живѣе още 14 години?

Споредъ таблицитѣ $v_{31} = 726$; $v_{31+14} = v_{45} = 622$, за това $P_{14} = \frac{622}{726}$.

Забѣлежка. Знаемъ, че обратната вѣроятность, т. е. нѣ вѣроятностьта $Q_r = 1 - \frac{v_{n+r}}{v_n}$

Напримѣръ.

- Каква е вѣроятностьта, че едно лице на 31 годишна възрастъ нѣма да доживѣе 45 годишна възрастъ?

$$Q_{14} = 1 - \frac{622}{726} = \frac{104}{726}$$

Слѣдователно по вѣроятно е, че ще доживѣе до 45 години.

§ 30.

Ако положимъ че $P_r = Q_r$, то можемъ да опредѣлимъ вѣроятното трайние, живота на едно лице.

Понеже $P_r = \frac{v_{n+r}}{v_n}$ и $Q_r = 1 - \frac{v_{n+r}}{v_n}$

то $\frac{v_{n+r}}{v_n} = 1 - \frac{v_{n+r}}{v_n}$ или $2\frac{v_{n+r}}{v_n} = 1$ или

или $\vartheta_{n+r} = \frac{\vartheta_n}{2}$.

Примѣръ. Да положимъ, че искаме да узнаемъ вѣроятното трайние на живота на едно лице отъ 36 години. или съ други думи колко години още ще живѣе това лице?

Отъ таблицитѣ намираме $\vartheta_{36} = 686$ отъ тука $\frac{1}{2}\vartheta_{36} = 343$. Сега диримъ въ таблицитѣ отъ каква години на възрастъ оставатъ да живѣятъ 343 души или приблизително. Най близкото число на това е 347 и е при 68. Значи вѣроятностьта е, че человѣкъ на 36 години може да умрѣ, когато достигне 68 годишна възрастъ.

§ 31.

Да предположимъ сега, че едно лице на m години живѣе съ друго на n години. Каква е вѣроятностьта, че двѣтѣ лица ще живѣятъ още r години?

Вѣроятностьта, че I-то лице ще живѣе още r години е: $p_r' = \frac{\vartheta_{m+r}}{\vartheta_m}$.

Вѣроятностьта, че II лице ще живѣе още r години е $p_r'' = \frac{\vartheta_{n+r}}{\vartheta_n}$.

Слѣдователно вѣроятностьта, че двѣтѣ лица ще живѣятъ още r години (сложно събитие) е $P_r = p_r' \cdot p_r'' = \frac{\vartheta_{m+r}\cdot\vartheta_{n+r}}{\vartheta_m\cdot\vartheta_n}$.

Вѣроятностьта, че тѣзи двѣ лица нѣма да усивѣятъ още r години е:

$$Q_r = 1 - p_r' p_r'' = \frac{\vartheta_m : \vartheta_n - \vartheta_{m+r}\, \vartheta_{n+r}}{\vartheta_m .\, \vartheta_n .}$$

§ 32.

Вѣроятното трайние на брака на двѣ лица отъ m и n години.

За да бѫдѫтъ r години заедно трѣбва

$$P_r = Q_r \quad \text{т. е.} \quad p_r' p_r'' = 1 - p_r' p_r''.$$

Отъ тука $2 p_r' p_r'' = 1$ или $p_r' p_r'' = \frac{1}{2}$

или $\vartheta_{m+r}\, \vartheta_{n+r} = \frac{1}{2}\, \vartheta_m \vartheta_n$.

Примѣръ. Каква е вѣроятностьта, че лице на 31 година ще усивѣе съ лице на 44 години още 10 години?

$$p_{10}' = \frac{\vartheta_{41}}{\vartheta_{31}} = \frac{650}{726} \quad \text{и} \quad p_{10}'' = \frac{\vartheta_{54}}{\vartheta_{44}} = \frac{538}{624}$$

слѣдвателно:

$$P = p_{10}' p_{10}'' = \frac{650 \cdot 539}{726 \cdot 629} = 0{\cdot}7658.$$

§ 33.

Усигоряване на капиталитѣ.

Нѣкой си на n година възрастъ нека да си дотори единъ капиталъ отъ K лева, за когато стигне r години. Колко трѣбва да заплати на дружеството?

Тъй като количеството K-лева се получа ва отъ нѣкой си капиталъ a лева по $p\%$ слѣдъ $(r-n)$ години, т. е. $K = aq^{r-n}$ (гдѣто $q = 1+\frac{p}{100}$), то сегашния капиталъ a, който трѣбва да заплати е равенъ на $\frac{K}{q^{r-n}}$, а вѣроятностьта, че този господинъ, който е сега на n години ще достигне r години е: $P_{n-r} = \frac{\vartheta_r}{\vartheta_n}$, то стойностьта на усигоряването е = на:

$$S = \frac{\vartheta_r}{\vartheta_n} \cdot \frac{K}{q^{r-n}}$$

Примѣръ. Колко трѣбва да заплати единъ баща на 35 годишна възрасть сега на банката за да получи дъщеря му слѣдъ 10 години 20000 лева, ако банката плаща 6%?

За да получи дъщерята 20000 лева слѣдъ 10 годи[ни] бащата, трѣбва да внесе $\frac{20000}{1,06^{10}}$ лева.

Сега за да усигори този капиталъ той трѣбва да внесе още $\frac{\vartheta_{35+10}}{\vartheta_{35}} \cdot \frac{20000}{1,06^{10}}$.

Понеже отъ 694 души на възрасть 35 годи[ни] 622 достигатъ до 45 годишна възрастъ, то значи, че въ 10 години умиратъ 72 души, слѣдов. вѣроятностьта, че той ще умрѣ е $\frac{72}{622}$.

Значи той трѣбва да заплати за сигорацията

$\frac{72}{622} \cdot \frac{20000}{1,06^{10}} = 1292,6$ лева.

Забѣлежка. Всичкитѣ застраховатални

дружества, които усигоряватъ капиталитѣ се рѫководятъ по горѣизложеното. Такъво дружество напр. у насъ е: „Дачия Романия"; то приема да спестява на хората паритѣ съ една опрѣдѣлена лихва, тъй щото слѣдъ извѣстно число години по едни опрѣдѣлени вносове се образува единъ капиталъ, ако ли този капиталъ не е усигоренъ, то наслѣдницитѣ на вносителя нѣматъ право да търсятъ нищо, нъ ако този капиталъ е усигоренъ и се случи, че умрѣ вносителя, то наслѣдницитѣ му получаватъ напълно суммата, която щеше да се образува ако живѣеше вносителя и плащаше си въ сроковетѣ суммитѣ цѣлото число години.

§ 34

Ако ли се трѣбова сигоранцията всѣка година да се плаща, а не изведнажъ, то имаме да рѣшимъ слѣдующата задача: Колко трѣбва да плаща въ началото на всѣка година едно лице на възрастъ n години за да получи слѣдъ r години единъ капиталъ отъ K. лева?

При рѣшението на тази задача се рѫководимъ отъ слѣдующето: Сегашната стойность на вѣроятната печалба е равна на сегашната стойность на вѣроятната загуба на банката.

Вѣроятностьта, че това лице ще живѣе r години е $\frac{v_{n+r}}{v_n}$, затова сегашната стойность на условний капиталъ K е $\frac{K}{q^r} \cdot \frac{v_{n+r}}{v_n}$

Да наречемъ съ k ежегодния вносъ, тогава той ще плати

първата година	.....	k лева
втората "	.....	$\frac{k}{q} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n}$ "
третята "	.....	$\frac{k}{q^2} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_n}$ "
....		....
....		....
r = тата "	.....	$\frac{k}{q^{r-1}} \cdot \frac{v_{n+r-1}}{v_n}$ "

(гдѣто $q = 1 + \frac{p}{100}$).

Слѣдователно:

$$k + \frac{k}{q} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n} + \frac{k}{q^2} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_n} + \dots + \frac{k}{q^{r-1}} \cdot \frac{v_{n+r-1}}{v_n} =$$

$\frac{K}{q^r} \cdot \frac{v_{n+r}}{v_n}$. Ако сега раздѣлимъ двѣтѣ части на това равенство съ q^n и прѣдположимъ за по кратко: $\frac{v_n}{q^n} = A_n$; $\frac{v_{n+1}}{v_n} = A_{n+1}$ ..... $\frac{v_{n+r-1}}{q^{n+r-1}} = A_{n+r}$, то имаме:

$$k(A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+r-1}) = K A_{n+r}$$

Ако прѣдположимъ още че:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = S_n \text{, то:}$$

$$A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+r-1} = S_n - S_{n+r}$$

и тогава нашата формула приема видъ:

$$k(S_n - S_{n+r}) = K A_{n+r} \text{, отъ тука: } k = \frac{K A_{n+r}}{S_n - S_{n+r}}.$$

Величината S_n и $A_n = v_r : q^n$ намираме въ логарит. таблици А. В. Шоурекъ на страница 155 исчислени за до $n =$ отъ 1 година до 95 години.

Примѣръ. Колко трѣбва да плаща всѣка година единъ баща, за да устори единъ капиталъ отъ 10000 лева за дъщеря си слѣдъ 15 години, която сега е на 5 години? Тука $S_5 = 7446,73$, а $S_{5+15} = S_{20} = 4551,10$, $A_{n+r} = A_{20} = v_{20} : q^{20} = 185,05$ и $S_5 - S_{20} = 4551,63$. Слѣдователно

$$K = 10000 \cdot \frac{185,05}{4551,63} = 406,6.$$

§ 35.

Усторяване на доходитѣ.

Нѣкой си иска да си устори единъ доходъ отъ R лева, за докато той е живъ. Колко трѣбва да заплати сега на банката, за да получава този доходъ всѣка година?

Ако прѣдположимъ, че лицето е на n години, тогава: $S = \frac{R}{v_n}\left(\frac{v_{n+1}}{q} + \frac{v_{n+2}}{q^2} + \cdots\right)$

или $\frac{S}{q^n} = \frac{R}{v_n}\left(\frac{v_{n+1}}{q^{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{q^{n+2}} + \cdots\right)$

Ако сега означимъ както по-прѣди:

$\frac{v_{n+1}}{q^{n+1}} = A_{n+1}$, $\frac{v_{n+2}}{q^{n+2}} = A_{n+2}$ .... то $\frac{S}{q^n} =$

$\frac{R}{v_n}(A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots) = \frac{R}{v_n} \cdot S_{n+1}$ Отъ тука

$S = R \cdot \frac{q^n}{v_n} \cdot S_{n+1} = \frac{R \cdot S_{n+1}}{v_n : q^n}$

Примѣръ. Колко трѣбва да заплати единъ мъж.

на 32 години за да си усигури всяки годенъ доходъ отъ 600 лева?

Тука $R = 600$, $S_{n+1} = S_{33} = 1170,99$ и $D_n : q^n = D_{33} : q^{33} = 89,61$ слѣдователно:

$$S = \frac{600 . 1170,99}{89,61} = 7804,5 \text{ лева.}$$

т. е. той трѣбва да внесе толкова лева, за да се ползува ~~отъ единъ~~ всѣка година отъ банката съ 600 лева (доходъ) до катъ е живъ.

§ 36.

Ако ли искаме да се ползуваме отъ единъ доходъ опредѣлено число години, тогава имаме да рѣшимъ слѣдующата задача. Колко трѣбва да внесе едно лице пари въ банката, за да се ползува всѣки годишенъ доходъ отъ R лева въ продължение на r години? Тогава, като обърнемъ всичкитѣ горни обозначения имаме:

$$S = \frac{R}{D_n}\left(\frac{D_{n+1}}{q} + \frac{D_{n+2}}{q^2} + \dots\dots + \frac{D_{n+r}}{q^r}\right) \text{ или}$$

$$S = R\,\frac{S_{n+1} - S_{n+r+1}}{D_n : q^n}$$

Примѣръ. Колко трѣбва да внесе едно лице на 35 годишна възрастъ, въ банката за да се ползува 15 години съ единъ доходъ отъ 360 лева всѣка година?

Тука $S_{n+1} = S_{36} = 933,70$; $S_{n+r+1} = S_{51} = 258,48$

$D_n : q^n = D_{35} : q^{35} = 74,15$, $R = 360$ и $S_{36} - S_{51} = 675,22$

слѣдователно $S = \frac{360 . 675,22}{74,15} = 3278,15$ лева.

§ 37.

Ако ли немаме въ състояние да заплатимъ такава една сумма изведнъжъ, то можемъ да плащаме всяка година по една известна сумма, тогава имаме да рѣшимъ слѣдующата задача:

По колко трѣбва да внасяме всяка година въ банката въ продължение на r години, за да си усигуримъ единъ доходъ, слѣдъ туй число години отъ K лева всѣки годишенъ доходъ?

Като удържимъ същитѣ обозначения имаме, че банката вѣроятно ще получи:

$$S\left(V_n + \frac{V_{n+1}}{q} + \frac{V_{n+2}}{q^2} + \dots + \frac{V_{n+r-1}}{q^{r-1}}\right)$$

а вѣроятно ще похарчи:

$$R\left(\frac{V_{n+r}}{q^r} + \frac{V_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \frac{V_{n+r+2}}{q^{r+2}} + \dots\right)$$

или като раздѣлимъ тѣзи двѣ получени изражения съ q^n и удържимъ прѣдишнитѣ обозначения ще получимъ:

$$S(A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+r-1})$$

$$R(A_{n+r} + A_{n+r+1} + A_{n+r+2} + \dots)$$

Като прiравнимъ полученитѣ изражения получаваме:

$$S(A_n + A_{n+r} + A_{n+2} + \dots + A_{n+r-1}) = R(A_{n+r} + A_{n+r+1} + \dots)$$

или:

$$S(S_n - S_{n+r}) = R\,S_{n+r}$$

Отъ тука

$$S = R\,\frac{S_{n+r}}{S_n - S_{n+r}}$$

Примѣръ. По колко трѣбва да внася едно лице на 15 годишна възрасть въ банката, та като достигне 25 годишна възрасть, да почне да се ползува съ единъ доходъ отъ 500 лева всѣка година до като е живъ?

Тука $R = 500$; $S_n = S_{15} = 3995,85$

$S_{n+r} = S_{25} = 2070,16$; $S_{15} - S_{25} = 1925,69$

Слѣдователно:

$$S = 500 \cdot \frac{2070,16}{1925,69} = 537,55 \text{ лева.}$$

§ 38.

Ако ли искаме, че внасянето въ банката да е (всѣка годишно) по части и да се ползуваме не до смъртьта а опрѣдѣлено число години, то имаме да рѣшимъ слѣдующата задача

По колко трѣбва да внасяме всѣка година въ банката въ продължение на r години за да се ползуваме отпослѣ съ единъ доходъ всѣки годишенъ още p години?

Вѣроятно, че банката ще получи отъ насъ една сумма, въ продължение на r години е:

$$S\left(v_n + \frac{v_{n+1}}{q} + \frac{v_{n+2}}{q^2} + \cdots\cdots + \frac{v_{n+r+1}}{q^{r-1}}\right)$$

а вѣроятно, че ще изхарчи:

$$R\left(\frac{v_{n+r}}{q^r} + \frac{v_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \frac{v_{n+r+2}}{q^{r+2}} + \cdots + \frac{v_{n+r+p-1}}{q^{r+p-1}}\right)$$

Слѣдователно:

$$S\left(v_n + \frac{v_{n+1}}{q} + \cdots \frac{v_{n+r-1}}{q^{r-1}}\right) = R\left(\frac{v_{n+r}}{q^r} + \frac{v_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \cdots\cdots + \frac{v_{n+r+p-1}}{q^{r+p-1}}\right)$$

или като задържа прѣдишнитѣ обозначения имаме:

$$S(A_n + A_{n+1} + \cdots\cdots + A_{n+r-1}) = R(A_{n+r} + A_{n+r+1} + \cdots\cdots + A_{n+r+p-1})$$

или

$$S(S_n - S_{n+r}) = R(S_{n+r} - S_{n+r+p})$$

и отъ тука

$$S = R.\frac{S_{n+r} - S_{n+r+p}}{S_n - S_{n+r}}$$

Примѣръ. По колко трѣбва да внася едно лице на 15 годишна възрастъ, въ банката, като достигне 25 годишна възрасть да почне да се ползува съ единъ доходъ отъ 500 лева въ продължение на още 20 години, т.е. до 45 годишна возрасть?

Тука $R = 500$ лева ; $S_n = S_{15} = 3995,85$; $S_{n+r} = S_{25} = 2070,16$; $S_{n+r+p} = S_{45} = 448,85$; $S_{n+r} - S_{n+r+p} = S_{25} - S_{45} = 1621,31$ и $S_n - S_{n+r} = S_{15} - S_{25} = 1925,69$

Следователно

$$S = 500 \cdot \frac{1621,31}{1925,69} = 441 \text{ левъ.}$$

Край.

Пловдивъ 1890 г. Февруарий 12-ий