

Ойлер Бета-функция В-сплайн: Определение и Основни Свойства

Дипломна работа на

Недялка Д. Делистоянова

специалност: **Информатика**, специализация: **Електронен бизнес**

фак. номер **M21846**

Научен ръководител

доц. д-р Петко Русков

Консултант

проф. д-р Любомир Дечевски

София, Юли 2007

Съдържание

Абстракт	v
Благодарности	vi
1 Увод	1
2 Въведение в предмета на В-сплайните	3
2.1 История	3
2.2 Полиномиални В-сплайни	5
2.2.1 Свойства на полиномиалните В-сплайни	7
2.2.2 Примери	8
2.3 Експо-рационални В-сплайни	11
2.3.1 Свойства на Експо-рационалните В-сплайни	14
2.3.2 Примери	15
2.4 Представяне на обобщена дефиниция на В-сплайн 'с интегриране на гърбици'	17
3 Бета-функция В-сплайн – определение и основни свойства	19
3.1 Бета-функция В-сплайн (БФБС) – подробно определение	19
3.2 Основни свойства	23
4 Изчисление на БФБС. Производни и антипроизводни	30
4.1 Изчисление на някои константи във формулата на БФБС	31
4.2 Представяне на БФБС в Бернщайнов базис	33
4.3 Представяне на БФБС в 'глобален' мономиален базис	37

4.4	Представяне на БФБС в 'локален' мономиален базис	43
4.5	Представяне на БФБС в Бернщайнов базис в целия домейн	45
5	Функционални криви в 2D	46
5.1	Бета-функция В-сплайн функции	46
5.2	Вектори от възли и непрекъснатост	52
5.3	Ермитови интерполационни свойства	52
6	Параметрични криви в 3D	56
6.1	Бета-функция В-сплайн криви	56
6.2	Стойност и производни на БФБС кривата	58
6.3	Определение/имплементация на "отворени" и "затворени" криви	60
6.4	Криви на Безие като локални криви	60
6.4.1	Локални криви на Безие и интерполация на Ермит	64
7	Заключение	68
	Списък на Фигурите	69
	Използвана литература	71
	Азбучен указател	72

Абстракт

В тази дипломна работа ще представим нов вид В-сплайн – Ойлер Бета-функция В-сплайн (БФБС). Ще представим подробно описание и ще формулираме основните му свойства и предимства пред полиномиалните В-сплайни. Също така ще бъде дадено точно пресмятане на Бета-функция В-сплайна, производните и антипроизводните ѝ, чрез използването на Бернщайнов базис и мономиални базиси. Накрая ще представим аналитично интерполацията на 2D и 3D криви с този В-сплайн и ще разгледаме кривите на Безие, като пример за локални криви при интерполация с БФБС. Също така се спираме на особеностите на Ермитовата интерполация с Бета-функция В-сплайн.

Ключови Думи: компютърно геометрично моделиране, сплайн, В-сплайн, Ойлер Бета-функция В-сплайн, бета функция, гама функция, кратност на възел, компактен носител, обвивка, крива, повърхнина, гладкост, непрекъснатост, геометрична непрекъснатост, интерполация, Ермитова интерполация, Лагранжова интерполация, апроксимация, ред на Тейлър, полиноми на Бернщайн, мономиален базис, крива на Безие

Благодарности

Бих искала да изкажа най-искрените си благодарности на проф. Любомир Т. Дечевски за огромната помощ, която ми указа за написването на тази работа. Благодаря на Арне Лаксо (Arne Lakså), за всички материали по темата за Експо-рационалните В-сплайни и за възможността да използвам неговите графики.

Искам да благодаря на проф. Недьо Попиванов за престоя ми в университета в Нарвик, Норвегия и на Никлас Грип (Niklas Grip) за невероятната подкрепа и помощ при престоя ми в университета Лулео, Швеция.

Юли 2007

Недялка Д. Делистоянова

Глава 1

Увод

Целта на тази дипломна работа е да представи нов тип от В-сплайн функции: Бета-функция В-сплайни. Тези В-сплайни са предложени от проф. Любомир Т. Дечевски, като по-прост вариант на по-рано предложените от него Експо-рационални В-сплайни (виж [1]), и са представени за първи път на четвъртата международна конференция "Multivariate Approximation: Theory and Applications" проведена през май 2007 в Канкун, Мексико (виж [5], [8]). Тези В-сплайни имат някои интересни свойства, които ги правят много лесни за практическа употреба при интерполиране на криви и повърхнини в Компютърното геометрично моделиране. Дипломната работа е разработена в университета в Нарвик, Норвегия, с голямото съдействие и подкрепа на Ивана Ганчева. Разширена и по-подробна версия на дипломната работа, представяща Бета-функция В-сплайните заедно с пример практическата им употреба, е [11].

Бета-функция В-сплайните и Експо-рационалните В-сплайни имат много прилики с полиномиалните В-сплайни. Също така, те предлагат и някои преимущества пред обикновените полиномиални В-сплайни и се надявам, че ще са полезно допълнение към богатото разнообразие на В-сплайни и успешно ще допълнят полиномиалните В-сплайни. Днес В-сплайните и NURBS са индустриален стандарт за представяне, проектиране и изчисление на криви и повърхнини. Те привлякоха вниманието ми по време на пребиваването ми в университета в Нарвик, Норвегия,

където беше разработена тази дипломна работа.

Дипломната работа се концентрира върху аналитичното представяне на Бета-функция В-сплайните. Ще представя формулировката на тези сплайни и основните свойства на Бета-функция В-сплайна. Ще дам пример за изчислението му в различни базиси. Накрая ще представя аналитично интерполацията на 2D и 3D криви с този В-сплайн и ще разгледам кривите на Безие, като пример за локални криви при интерполация с Бета-функция В-сплайни.

Глава 2

Въведение в предмета на В-сплайните

В тази глава ще направим въведение в темата на В-сплайните като започнем с кратка история в част 2.1. След това ще дискутираме обикновените В-сплайни, техните свойства и влиянието на кратните възли върху гладкостта в част 2.2. В част 2.3 накратко ще представим Експо-рационалните В-сплайни. След това, в част 2.4, ще преминем към обобщаване на дефиницията на В-сплайни, получени чрез 'интегриране на гърбици'.

2.1 История

Термина сплайн произлиза от инструмент – гъвкава дървена летва, използвана за чертане на криви от средновековните дърводелци. В днешно време той се използва за широк клас от функции, които се използват при интерполация на данни или апроксимация. Сплайните могат да се използват за интерполация и/или изглаждане на едно-измерна и много-измерна информация.

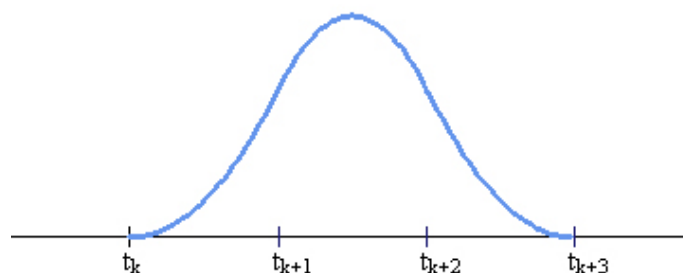
Термина "Компютърно Геометрично Моделиране" (Computer-Aided Geometric Design (CAGD)) е въведен от Р. Барнхил и Р. Райзенфелд през 1974 на

конференция в университета в Юта, считана за основаващо събитие в тази сфера. Първият учебник "Изчислителна геометрия за конструиране и производство (Computational Geometry for Design and Manufacture)" е бил издаден през 1979 от И. Фо и М. Прат. Научното списание "Компютърно геометрично моделиране" е издадено за първи път през 1984 от Р. Барнхил и У. Боум.

Първите записи за употреба на криви за производство са били при древните римляни за корабостроенето. Те са използвали мостри за правене на корабните перила. През 1959 Пол Де Кастельо, който работел в Citroën, разработил система която главно целяла моделирането на криви и повърхнини. С употребата на полиномите на Бернщайн и неговите дефиниции се появил добре познатият алгоритъм на Де Кастельо. За тази цел той използвал контролни полигони. Вместо да дефинира кривата (повърхнината) чрез точни от нея, той използвал контролни полигони от точки около кривата (повърхнината). В началото на 1960-те Пиер Безие, който работил в Renault представил основна крива като сечение на два елипсоидни цилиндъра.

В началото на 19-ти век Френе поставил началото на диференциалната геометрия на кривите. Теорията на приблизителността и Числения анализ станали важни области за основите на CAGD. В средата на 1950-те американската компания Боинг използвала софтуер базиран на коничните конструкции на Лиминг в дизайна на самолетните корпуси, а Дж. Фъргюсън и Д. Макларън моделирали различни криви за дизайна на самолетните крила. Идеята била да сглобят кубични пространствени криви и да формират сложни криви, които могат да се интерполират на множество от точки.

В-сплайните (съкратено на базисни сплайни) са представени от Й. Шонберг през 1946 за случай на унифицирани (равноотстоящи) възли. В-сплайни за неунифицирани (неравноотстоящи) възли се разглеждат от Х. Къри през 1947. През 1960 Кокс Де Бур, използвал В-сплайните като средство за геометрично представяне. Рекурсивното изчисляване на В-сплайн кривите е благодарение на него и се нарича алгоритъм на Де Бур.



Фигура 2.1: Графика на k -ти В-сплайн $N_{k,2}$ от 2ра степен (3ти ред).

Образуването на В-сплайн криви като NURBS е станало стандартна форма на крива и повърхнина в CAD/CAM индустрията. Произхода на думата NURBS идва от "Nonuniform Rational B-spline".

За повече информация относно историята на геометричното моделиране вижте [10] "A History of Curves and Surfaces in CAGD" от Джералд Фарин.

В днешно време В-сплайните се използват в широк спектър от виртуални продукти, като: игрални и анимационни филми, компютърни игри, симулации и симулатори, обучаващи системи, VR системи като "Second life" и други (виж [7]).

2.2 Полиномиални В-сплайни

Частично полиномиални криви от дадена степен и непрекъснато диференцируеми до някакъв ред са известни като сплайни. Сплайните се използват в приложения вариращи от обработка на образи, компютърно моделиране, до решаване на частни диференциални уравнения. Проблема за конструиране на мрежа от крайни елементи, които интерполират или апроксимират многомерна информация е основен проблем, който се изследва в геометричното моделиране. Параметричните сплайни са вектори от много-аргументни полиномиални (или рационални) функции.

В-сплайн е сплайн функция, която има минимален носител при дадена степен,

гладкост и дефиниционна част. Основна теорема гласи, че всяка сплайн функция може да се представи като линейна комбинация от В-сплайни от същата степен и гладкост върху същата дефиниционна област. Термина В-сплайн е предложен от Шоенбърг (Schoenberg) и е съкратена форма на базисен сплайн.

При компютърното геометрично моделиране и компютърната графика термина В-сплайн често означава сплайн крива параметризирана от сплайн функция, която е изразена като линейна комбинация от В-сплайни (в математическия смисъл).

Сега ще дадем определение за В-сплайн и ще въведем основните понятия, които се използват. Нека е дадено множество T от $n + 1$ не-намаляващи числа, $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Елементите на това множество ще наричаме възли (knots), а самото множество – вектор от възли (knot vector), а полуотворения интервал $[t_i, t_{i+1})$ е i -тата обвивка (span). Някои възли може да са равни. Ако възела t_i се появява i_k на брой пъти (т.е. $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+i_k-1}$), ще казваме, че t_i е кратен възел (multiple knot) с кратност i_k . В противен случай, ако t_i се появява само веднъж, ще казваме че е прост възел (simple knot). Ако възлите са равномерно разположени, то вектора от възли се нарича унифициран (uniform knot vector), в противен случай той е неунифициран (non-uniform knot vector). Възлите могат да бъдат разглеждани като точки, които разделят интервала $[t_0, t_n]$ на подинтервали. Дефиниционната област на всички В-сплайн базисни функции се предполага, че е $[t_0, t_n]$.

k -тата В-сплайн базисна функция от степен p , записана като $N_{k,p}(u)$, се дефинира чрез следната рекурсивна формула:

$$N_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако } t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$N_{k,p}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+p} - t_k} N_{k,p-1}(t) + \frac{t_{k+p+1} - t}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1,p-1}(t).$$

Тази формула се нарича рекурсивна формула на Кокс/Де Бур.

Най-често използваните полиномиални сплайни са частично константни, частично

линейни и гладки В-сплайни. Частично константните В-сплайни (виж Фигура 2.2) са от първи ред и са най-простите сплайни. Те са дефинирани само върху една обвивка (span) и са прекъснати във възлите. Частично линейните В-сплайни (виж Фигура 2.3) са сплайн функции от 2-ри ред (1-ва степен), дефинирани са върху два съседни обвивки и са непрекъснати във възлите, но не са диференцируеми. Гладките В-сплайни (виж Фигура 2.4) са сплайн функции от 2-ра или по-висока степен и са съответно непрекъснати и диференцируеми във възлите.

2.2.1 Свойства на полиномиалните В-сплайни

Ще изброим някои от основните свойства на полиномиалните В-сплайн базисни функции без да се спираме подробно на тях.

Св1. Неотрицателност – $N_{k,p}(t)$ е неотрицателно за всяко k , p и t .

Св2. Локален носител (Local Support) – $N_{k,p}(t)$ е ненулев полином в интервала $[t_k, t_{k+p+1})$. Още повече $N_{k,p}(t) = 0$ за всяко t извън този интервал.

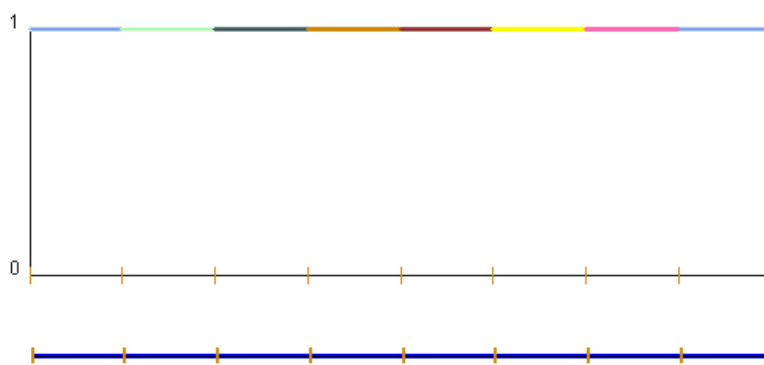
Св3. Разбиване на единицата (Partition of Unity) – Сумата от всички ненулеви базисни функции от степен p в междувъзловия интервал $[t_k, t_{k+1})$ е 1. Също така за всеки такъв интервал $[t_k, t_{k+1})$, най-много $p + 1$ на брой базисни функции от степен p са различни от нула: $N_{k-p,p}(t)$, $N_{k-p+1,p}(t)$, $N_{k-p+2,p}(t)$, ..., $N_{k,p}(t)$.

Имаме:

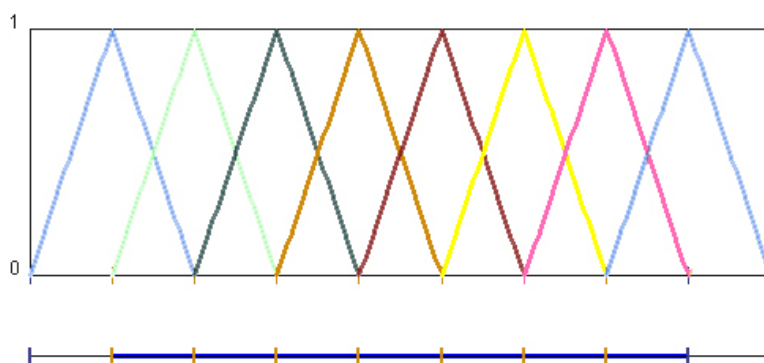
$$\sum_{i=0}^p N_{k-p+i,p}(t) = 1, \quad \text{за } t \in [t_k, t_{k+1})$$

Св4. Базисната функция $N_{k,p}(t)$ е C^{p-i_k} непрекъснатата във възел с кратност i_k . Следователно увеличаването на кратността, намаляваме нивото на непрекъснатост. При увеличаване на степента се увеличава и непрекъснатостта.

Св5. Ако броя на възлите е $n + 1$, степента на базисните функции е p , а



Фигура 2.2: Частично константен В-сплайн. Този В-сплайн е от 1-ви ред и фигурата ясно показва, че е прекъснат във възлите.



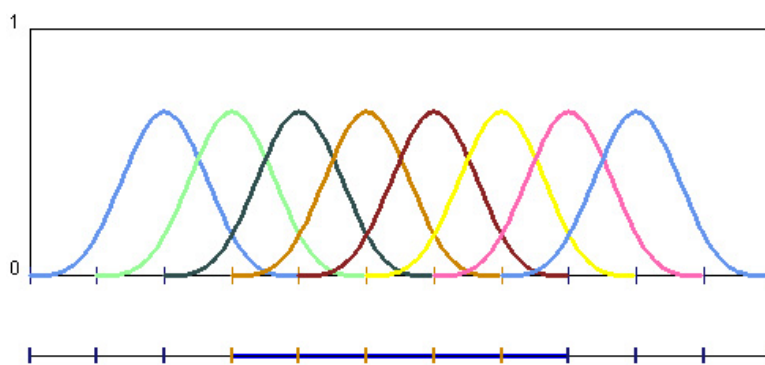
Фигура 2.3: Частично линеен В-сплайн – 2-ри ред сплайн. Виждаме, че В-сплайн е непрекъснат във възлите, но не е диференцируем.

броя на базисните функции от степен p е $m + 1$, то $n = m + p + 1$. За да обобщим, ако имаме дадени n и p , то можем да намерим броя на базисните функции от степен p чрез равенството $n = m - p + 1$ и те са: $N_{0,p}(t)$, $N_{1,p}(t)$, $N_{2,p}(t)$, \dots , $N_{n,p}(t)$.

2.2.2 Примери

Нека разгледаме няколко примера на полиномиални В-сплайни.¹ Както знаем В-сплайн функцията $N_{k,p}(t)$ има компактен носител (compact support). Това

¹Графиките на полиномиални В-сплайни са генерирани с помощта на интернет базирано приложение [14], служещо за генериране на графики на сплайни, криви и повърхнини.

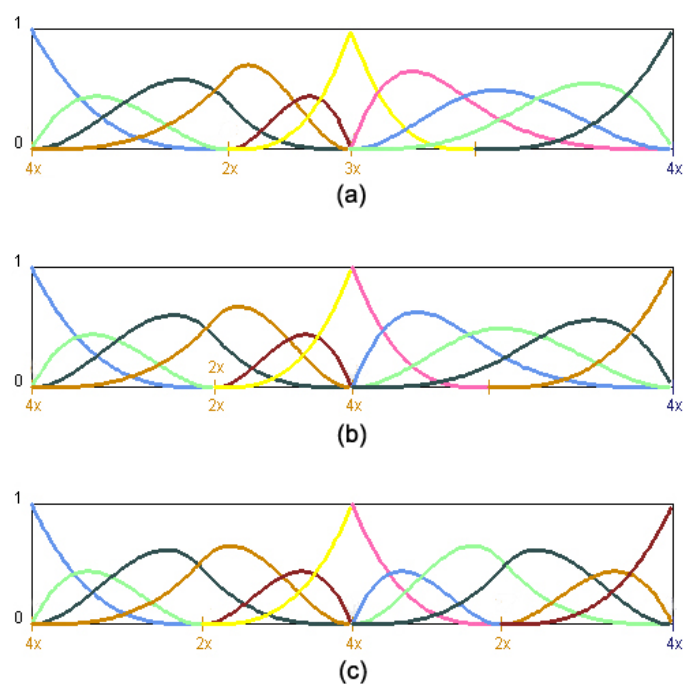


Фигура 2.4: Гладък В-сплайн от 4-ти ред. По-високата степен на В-сплайна му позволява непрекъснатост и диференцируемост във възлите.

означава, че тази функция е нула извън даден интервал. Носителят зависи от редицата от възли и винаги съдържа интервалите между няколко съседни възела. Носителят на В-сплайн от ред q съдържа $q + 1$ възела, като един или повече от тях може да съвпадат – кратен възел. Следователно при нарастване на степента на В-сплайна, нараства и размера на носителя (blowing up of the support) и между два съседни възела има повече ненулеви В-сплайни. Така с увеличаване на степента се увеличава и гладкостта, но изчислението на интерполиращата функция става по сложно.

На Фигури 2.2, 2.3 и 2.4 можем да видим пример за частично константни, частично линейни и гладки В-сплайни с *прости* възли. Фигура 2.2 показва В-сплайн от 1-ви ред и както можем да видим носителят му обхваща два съседни възела, на Фигура 2.3 имаме В-сплайн от 2-ри ред и носителят му вече обхваща три поредни прости възела. С нарастването на степента/реда, нараства и броя на поредни възли влизащи в носителят на В-сплайна и на Фигура 2.4 можем да видим В-сплайн от 4-ти ред, където са обхванати пет поредни прости възела.

Кратните възли оказват значително въздействие върху практическото изчисление на полиномиалните В-сплайни. Нека видим какво се случва когато имаме такива възли. Знаем, че ако кратността на възела нараства, то В-сплайна става все по-малко гладък, докато не се получи прекъсване. Кратността на възлите влияе по следния начин на гладкостта: ако възел t се появява точно m пъти в редицата



Фигура 2.5: Примери на полиномиални В-сплайни от 4-ти ред с кратни възли. На изображение (a) виждаме получаването на 'рѳбче' при възел с кратност 3. На изображения (b) и (c) имаме възел с кратност 4 и сплайна е прекѳснат, защото кратността на възела е по-голяма от степента на В-сплайна.

t_k, \dots, t_{k+p} , то В-сплайна $N_{k,p}$ и неговите първи $p - m - 1$ производни са непрекъснати във възела t , докато $p - m$ -тата производна има скок в t .

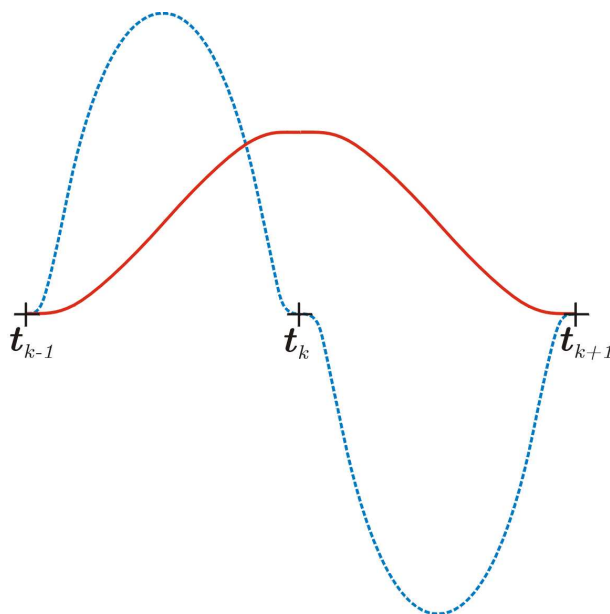
С кратността на възлите са свързани много интересни свойства на обикновените полиномиалните В-сплайни. Тук ще споменем някои от тях:

1. Всеки възел с кратност m редуцира ненулевия област на най-много $m - 1$ базисни функции. Разглеждаме $N_{k,p}(t)$ и $N_{k+1,p}(t)$. Първия е ненулев в $[t_k, t_{k+p+1})$, докато втория е ненулев в $[t_{k+1}, t_{k+p+2})$. Ако преместим t_{k+p+2} до t_{k+p+1} , така че t_{k+p+1} става двоен възел, то носителят на $N_{k,p}(t)$ все още има $p + 1$ интервала между съседни възли, но броя на тези интервали е намалял с единица, защото интервал $[t_{k+p+1}, t_{k+p+2})$ вече е изчезнал. Обобщено, създаването на възел с кратност m повлиява на $m - 1$ полиномиални В-сплайн базисни функции.
2. Във всеки вътрешен възел с кратност m , броя на ненулевите полиномиални В-сплайн базисни функции от степен p е най-много $p - m + 1$.

Тези свойства могат да се видят при полиномиалния В-сплайни от 3-та степен, показан на Фигура 2.5 (а), (б) и (с). На Фигура 2.5 (а) виждаме получаването на 'ръбче' при възел с кратност 3. Също така през този възел минава само един, а през възела с кратност 2 – два ненулеви полиномиални В-сплайна. На Фигура 2.5 (б) и (с) имаме възел с кратност 4 и сплайна е прекъснат, защото кратността на възела е по-голяма от степента на В-сплайна.

2.3 Експо-рационални В-сплайни

Експо-рационалните В-сплайни (ЕРБС) са нов вид В-сплайни, наскоро предложени от проф. Любомир Т. Дечевски. Тези сплайни откриват много нови възможности за моделиране на повърхнини и триангулации в Компютърното геометрично моделиране, но те няма да бъдат тема на дискусия в тази работа. В тази глава ще дадем основната формулировка на Експо-рационалната В-сплайн базисна



Фигура 2.6: Графика на ЕРБС базисна функция $B_k(t)$ (плотно червено) и неговата първа производна (син пунктир). Възлите t_{k-1}, t_k и t_{k+1} са също отбелязани на графиката.

функция и ще посочим някои важни свойства. Повече информация относно тези сплайни може да бъде намерена в [1] и [2], а относно практическата им употреба – в [12].

Типичното за този вид В-сплайни е, че производната на базисната функция (израз 2.4) е експоненциална функция с рационална степен. От там идва и името "Експо-рационални В-сплайни".

Ще дадем дефиниция за ЕРБС. Нека имаме $t_k \in \mathbb{R}$ и $t_k \leq t_{k+1}$ за $k = 0, 1, 2, \dots, n$, т.е. разглеждаме нарастващ вектор от възли $\{t_k\}_{k=0}^{n+1}$. Обобщеното определение за Експо-рационален В-сплайн (ЕРБС) се основава на нарастващ вектор от възли и за всеки интервал между два съседни възела имаме 5 различни съществени параметъра (intrinsic parameters) (виж [4], [6] и [3]). Дефиницията е относно тези предишни статии и е предложена първо от проф. Любомир Дечевски.

Определение 2.1. Експо-рационален В-сплайн, свързан с три нарастващи възела t_{k-1}, t_k и t_{k+1} , $B_k(t) = B_k(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}, \gamma_{k-1}, \lambda_{k-1}, \sigma_{k-1}, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \lambda_k, \sigma_k; t)$

се дефинира чрез

$$B_k(t) = \begin{cases} S_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \psi_{k-1}(s) ds, & \text{ако } t \in (t_{k-1}, t_k], \\ S_k \int_t^{t_{k+1}} \psi_k(s) ds, & \text{ако } t \in (t_k, t_{k+1}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.2)$$

където

$$S_k = \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt \right]^{-1} \quad \text{при } t_k < t_{k+1}. \quad (2.3)$$

и

$$\psi_k(t) = e^{-\beta_k \frac{|t - ((1-\lambda_k)t_k + \lambda_k t_{k+1})|^{2\sigma_k}}{((t-t_k)(t_{k+1}-t)\gamma_k)^{\alpha_k}}}, \quad (2.4)$$

където

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad \gamma_k > 0, \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad \sigma_k \geq 0.$$

Първата производна на ЕРБС базисната функция е:

$$DB_k(t) = \begin{cases} \frac{S_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \psi_{k-1} \circ w_{k-1}(t), & \text{ако } t \in (t_{k-1}, t_k], \\ -\frac{S_k}{t_{k+1} - t_k} \psi_k \circ w_k(t), & \text{ако } t \in (t_k, t_{k+1}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Стойностите по подразбиране на реалните параметри (intrinsic parameters) са $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k = \sigma_k = 1$, $\lambda_k = \frac{1}{2}$, $k = 1, \dots, n$.

На Фигура 2.6 е показана графика на $B_k(t)$ (2.2) (в червено) и неговата първа производна (2.5) (в синьо), за което са използвани стойностите по подразбиране на параметрите $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \lambda_k, \sigma_k$. Формата е камбановидна (bell-shaped) и обхваща два интервала от възли. Равенство (2.5) показва, че скалирането на първите производни зависи от размера на интервала между възлите, защото интеграла от първите производни върху целия интервал трябва да е 1. На Фигура 2.6 двата интервала имат дължина 1.

Обобщената дефиниция на ЕРБС се базира на прости възли, но уравнение (2.2) позволява употребата на кратни възли. Кратните възли при ЕРБС причиняват

прекъсване, точно както и при полиномиалните В-сплайни. Константата S_k (виж уравнение 2.3) е скалиращият фактор (scaling factor) на ЕРБС.

2.3.1 Свойства на Експо-рационалните В-сплайни

В тази част ще представим някои от основните свойства на Експо-рационалния В-сплайн (ЕРБС). За свойствата, отнасящи се до стойностите на производните във възлите и непрекъснатостта на производните в случая на прости възли, съществуват ограничения на параметрите.

Имаме следните основни свойства:

Св1. $B_k(t_k) = 1$ за всяко $k = 1, 2, \dots, n$. Това също е и свойство на полиномите на Лагранж.

Св2. Всяка базисна функция $B_k(t)$ е положителна в (t_{k-1}, t_{k+1}) и нула иначе.

$$B_k(t) \begin{cases} > 0, & t \in (t_{k-1}, t_{k+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Св3. Множеството от ЕРБС базисни функции $B_k(t)$ за $k = 1, 2, \dots, n$ образува разбиване на единицата (афинна комбинация) в $(t_1, t_n]$:

$$\sum_{k=1}^n B_k(t) = 1, \quad \text{за всяко } t \in (t_1, t_n].$$

Следва, че ако $t_k < t \leq t_{k+1}$, то $B_k(t) + B_{k+1}(t) = 1$.

Св4. Всяка базисна функция $B_k(t)$ е C^∞ -гладка в \mathbb{R} .

Св5. Всички производни на всички базисните функции са нули в техният междинен възел t_k .

$$D^j B_k(t_k) = 0 \quad \text{за } j = 1, 2, \dots$$

В действителност, те са нули във всички възли.

Ако обобщим резултата от тези свойства, то може да направим някой важни извода. Свойство **Св1** показва, че интерполацията е от Лангранжов вид.

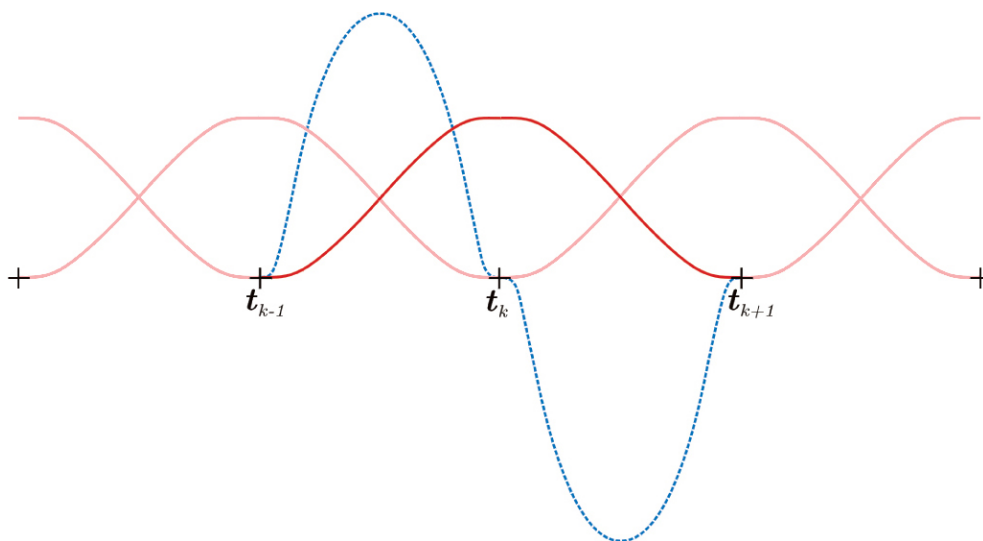
Свойство **Св2** показва, че локалният носител заема два интервала, точно както при линейните В-сплайни. Свойство **Св3** показва, че ЕРБС не се променят при афинни трансформации, което също е свойство и на В-сплайн/Бернщайн полиномите (обяснено в [9]). Свойства **Св2** и **Св3** показват, че ЕРБС не е само афинна комбинация, но и изпъкнала комбинация (convex combination) (образува положително разбиване на единицата). Свойства **Св1** и **Св4** показват, че базисните функции са в \mathbb{R} , когато възлите са прости. Свойство **Св5** позволява Ермитова интерполация. Свойства **Св1**, **Св2** и **Св3** са общи за ЕРБС и линейните В-сплайни.

При споменатите ограничения за параметрите, Експо-рационалните В-сплайни имат свойството на Ермитовата интерполация. Тъй като $B_k(t_k) = 1$ и всички други базисни функции са нули в t_k , то имаме строга интерполация от Лагранжов вид. Също така факта, че всички производни на всички базисни функции $B_k(t)$ са нули в техните междинни възли t_k позволява Ермитова интерполация от всякаква степен, т.е. броя производни, които можем да използваме при Ермитовата интерполация е неограничен.

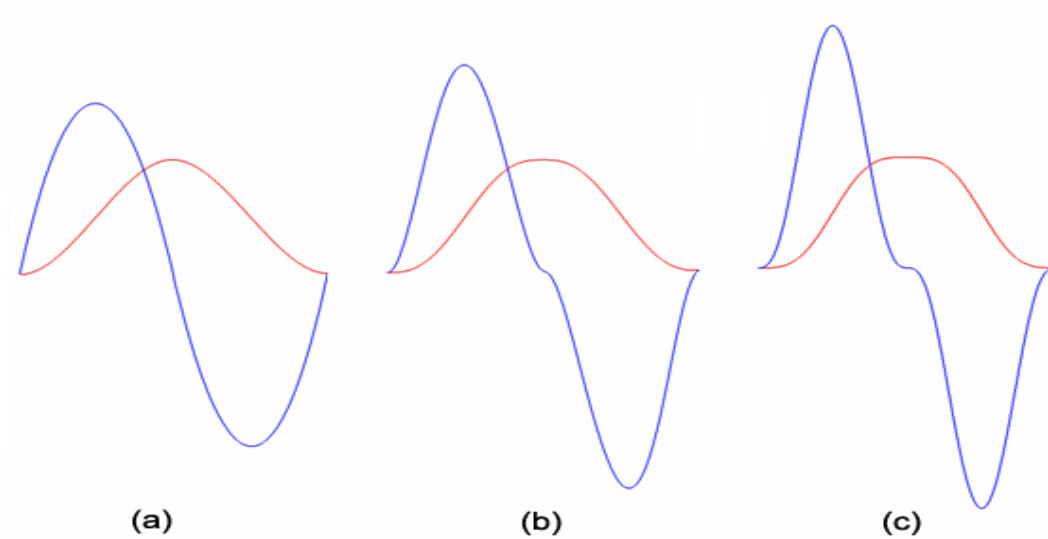
2.3.2 Примери

Нека разгледаме няколко примера на Експо-рационални В-сплайни. На Фигура 2.7 е показана графика на $B_k(t)$ (2.2) (в червено) и неговата първа производна (2.5) (в синьо). Обвивката на ЕРБС обхваща само два съседни интервала от възли, точно както частично линейните В-сплайни (виж Фигура 2.3). В случая на ЕРБС, при нарастване на степента на В-сплайна, размера на носителя не се променя.

На фигура 2.8 (а), (b) и (c) виждаме графики на Експо-рационални В-сплайн базисни функции при различен избор на параметрите на $B_k(t) = B_k(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}, \gamma_{k-1}, \lambda_{k-1}, \sigma_{k-1}, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \lambda_k, \sigma_k; t)$. Съществената разлика между обикновените полиномиални В-сплайни и Експо-рационалните В-сплайни е, че кратността на възлите при ЕРБС не влияе на гладкостта на сплайна.



Фигура 2.7: Графика на k -та ЕРБС базисна функция B_k .



Фигура 2.8: Графики на ЕРБС базисна функция с 1ви(а), 2ри(б) и 3ти(в) ред на непрекъснатост.

2.4 Представяне на обобщена дефиниция на В-сплайн 'с интегриране на гърбици'

Конструкцията за получаване на Експо-рационални В-сплайни - положителна гърбовидна функция, дефинирана отляво на носителя, отрицателна гърбовидна функция дефинирана отдясно и интегриране на тези функции в съответните части от носителя на В-сплайна, за да се получи базисния сплайн, може да се формализира за всякаква гърбовидна функция, като при това ще се запазят много от интересните свойства. Чрез интегрирането и евентуалното нормализиране на интеграла, получаваме разбиването на единицата (partition of unity). Това представлява интерес за всякакви форми на гърбици, даже и за комбинирани, за това е хубаво да се формализира. Тази задача за обща формализация няма да бъде направена тук, а само ще разгледаме най-простия случай, когато гърбицата не е експо-рационална, а е полином на Бернщайн. Геометричните свойства на тези В-сплайни не са толкова универсални като ЕРБС, но тъй като са по-прости могат да се изследват аналитично, например могат да се сметнат точно.

Нека дадем аналитична определение на този обобщен В-сплайн 'с интегриране на гърбици'.

Определение 2.2. *Обобщен В-сплайн 'с интегриране на гърбици', свързан с три нарастващи възела t_{k-1} , t_k и t_{k+1} , $B_k(t)$ се дефинира чрез*

$$B_k(t) = \begin{cases} S_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \psi_{k-1}(s) ds, & \text{ако } t \in (t_{k-1}, t_k], \\ S_k \int_t^{t_{k+1}} \psi_k(s) ds, & \text{ако } t \in (t_k, t_{k+1}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

където

$$S_k = \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt \right]^{-1} \quad \text{при } t_k < t_{k+1}.$$

и $\psi_k(t)$ е обща 'гърбовидна' функция.

Забележка 2.1. *Единственото ограничение за функцията $\psi_k(t)$, е да е дефинирана върху (t_k, t_{k+1}) и $\psi_k(t_k) = \psi_k(t_{k+1}) = 0$, и да е от камбановиден тип.*

Тази конструкция на обобщения ЕРБС е валидна само за векторни пространства, където базисните вектори са функции.

ЕРБС е много хубав пример за такъв В-сплайн, защото всички производни на базисните функции са нули във възлите.

По-простия пример с използването на полиноми на Бернщайн, не притежава всички хубави геометрични свойства на ЕРБС, но е достатъчно прост, за да бъде сметнат точно. Този В-сплайн ще бъде обект на изследване в тази дисертация, като за подинтегрална функция ще ползваме Ойлеровата Бета функция. От тук идва и наименованието на тези В-сплайни – Ойлер Бета-функция В-сплайн, накратко БФБС.

Глава 3

Бета-функция В-сплайн – определение и основни свойства

В тази глава ще разгледаме в подробности новия В-сплайн предложен от Любомир Т. Дечевски – виж част 2.4.

3.1 Бета-функция В-сплайн (БФБС) – подробно определение

Нека $t_k \in \mathbb{R}$ и $t_k < t_{k+1}$ за $k = 0, 1, 2, \dots, n + 1$, т.е. ние ще разглеждаме строго нарастващ вектор от възли $\{t_k\}_{k=0}^{n+1}$.

Определение 3.1. *Бета-функция В-сплайн (Beta-function B-spline), свързана с три строго нарастващи възела t_{k-1} , t_k и t_{k+1} , $B_k(t) = B_k(i_{k-1}, i_k, i_{k+1}; t)$ се*

дефиниране чрез

$$B_k(t) = \begin{cases} S_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \psi_{k-1}(s) ds, & \text{ако } t \in (t_{k-1}, t_k), \\ S_k \int_t^{t_{k+1}} \psi_k(s) ds, & \text{ако } t \in (t_k, t_{k+1}), \\ 1, & \text{ако } t = t_k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.1)$$

с

$$S_k = \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt \right]^{-1} \quad (3.2)$$

и

$$\psi_k(t) = C_k \frac{(t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3.3)$$

където

$$C_k = \binom{i_k + i_{k+1}}{i_k}, \quad (3.4)$$

и

$$i_l > 0, \quad l = k - 1, k, k + 1. \quad (3.5)$$

Ние ще разглеждаме само случая, когато $i_l \in \mathbb{N}$.

Ако дефинираме ψ_k върху $(-\infty, +\infty)$, получаваме подобно определение:

Определение 3.2. Бета-функция В-сплайн (Beta-function B-spline), свързана с три строго нарастващи възела t_{k-1} , t_k и t_{k+1} , $B_k(t) = B_k(i_{k-1}, i_k, i_{k+1}; t)$ се дефиниране чрез

$$B_k(t) = \begin{cases} S_{k-1} \int_{-\infty}^t \psi_{k-1}(s) ds, & \text{ако } t \in (-\infty, t_k), \\ S_k \int_t^{+\infty} \psi_k(s) ds, & \text{ако } t \in (t_k, +\infty), \end{cases} \quad (3.6)$$

с

$$S_k = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(t) dt \right]^{-1} = \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt \right]^{-1} \quad (3.7)$$

и

$$\psi_k(t) = \begin{cases} C_k \frac{(t-t_k)^{i_k} (t_{k+1}-t)^{i_{k+1}}}{(t_{k+1}-t_k)^{i_k+i_{k+1}}}, & \text{ако } t \in [t_k, t_{k+1}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.8)$$

където C_k и $i_l > 0$, $l = k-1, k, k+1$, са същите като в (3.4) и (3.5).

Забележка 3.1. В случая на Определение 3.2 (ψ_{k-1} и ψ_k са дефинирани върху $(-\infty, +\infty)$) $B_k(t_k) = 1$, което следва директно от непрекъснатостта. Това е част от следващата лема.

Забележка 3.2. Забеляваме, че $\psi_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, са Бернщайнови полиноми за съответния интервал $[t_k, t_{k+1}]$, до константен множител. Наистина,

$$\text{ако } t_k = 0 \text{ и } t_{k+1} = 1, \quad \psi_k(t) = t^{i_k} (1-t)^{i_{k+1}}, \quad (3.9)$$

който съответства на Бернщайновия полином

$$p(i_k, i_{k+1}; t) = \binom{i_k + i_{k+1}}{i_k} t^{i_k} (1-t)^{i_{k+1}} = \binom{i_k + i_{k+1}}{i_{k+1}} t^{i_k} (1-t)^{i_{k+1}} \quad (3.10)$$

от степен $i_k + i_{k+1}$, до множител $\binom{i_k + i_{k+1}}{i_k} = \binom{i_k + i_{k+1}}{i_{k+1}}$. За произволен интервал $[t_k, t_{k+1}]$, ψ_k се получава чрез съответната линейна смяна на променливи, изображение на $[0, 1]$ върху $[t_k, t_{k+1}]$.

Забележка 3.3. В двете дефиниции (3.1 и 3.2) разглеждаме параметрите $i_{k-1}, i_k, i_{k+1} \in \mathbb{N}$. Това е случая, в който представеният В-сплайн (който е непълна Бета функция) може да бъде пресметнат точно, тъй като в този случай той е полином между възлите.

Лема 3.1. Дефиниции 3.1 и 3.2 са еквивалентни.

Доказателство. 'Определение 3.1 \Rightarrow Определение 3.2' следва от ограничение на дефиницията на ψ_{k-1} и ψ_k в Определение 3.2 до тяхната съответна дефиниция в 3.1, без промяна на интегралите. Стойностите $B_k(t_k) = 1$ и $B_k(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, t_{k-1}] \cup [t_{k+1}, +\infty)$ могат да бъдат пресметнати директно в Определение

3.2 и те са равни на техните съответни стойности в Определение 3.1.

'Определение 3.2 \Rightarrow Определение 3.1' следва от разширяване на дефинициите на ψ_{k-1} и ψ_k в Определение 3.1 до техните съответни дефиниции в 3.2, без промяна на интегралите. Стойностите $B_k(t_k) = 1$ и $B_k(t) \equiv 0$ за $t \in (-\infty, t_{k-1}] \cup [t_{k+1}, +\infty)$, дадени в Определение 3.1, са същите като тези пресметнати в Определение 3.2.

Следователно, двете дефиниции са еквивалентни □

Имайки предвид еквивалентността на дефинициите 3.1 и 3.2, в бъдеще ще се обръщаме към която и да е от тях като Определение 3.1.

Лема 3.2. *Бета-функция В-сплайн (Beta-function B-spline), зададен чрез Определение 3.1, е непрекъснат във възлите t_i , $i = 0, 1, \dots, n + 1$.*

Доказателство. Нека разгледаме интервала $[t_{k-1}, t_{k+1}]$.

Нека изследваме ψ_{k-1} в $[t_{k-1}, t_k]$.

Имаме:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^-} \psi_{k-1}(t) &= 0 \quad \text{от Определение 3.1,} \\ \psi_{k-1}(t) &\text{ е полином за } t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} \psi_{k-1}(t) &= \psi_{k-1}(t_{k-1}) = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\Rightarrow \psi_{k-1}$ е непрекъсната за $t = t_{k-1}$.

По същия начин, със съответните преобразувания, може да бъде доказано, че $\psi_{k-1}(t)$ е непрекъсната за $t = t_k, t_{k+1}$.

$B_k(t)$ е интеграл от непрекъсната функция в $[t_{k-1}, t_k)$ и $(t_k, t_{k+1}]$

$\Rightarrow B_k(t)$ непрекъснато диференцируема в тези интервали

$\Rightarrow B_k(t)$ е непрекъснат в тези интервали

$\Rightarrow B_k(t)$ е непрекъснат в t_{k-1} и t_{k+1} .

Нека видим какво се случва във възела t_k .

Имаме:

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} B_k(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} B_k(t) = B_k(t_k) = 1. \quad (3.12)$$

$\Rightarrow B_k(t)$ е непрекъснат за $t = t_k$. □

3.2 Основни свойства

Теорема 3.1. *Разглеждаме следните основни свойства на базисните функции $B_k(t)$, $k = 1, \dots, n$.*

C1 (*Стойност и непрекъснатост във вътрешния възел t_k и в граничните възли на дефиниционната област t_{k-1} и t_{k+1}*)

(a) $B_k(t_k) = 1$;

(б) $\lim_{t \rightarrow t_k^-} B_k(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} B_k(t) = B_k(t_k) = 1$;

(в) $B_k(t_{k-1}) = B_k(t_{k+1}) = 0$;

(г) $\lim_{t \rightarrow t_{k-1}^-} B_k(t) = \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} B_k(t) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} B_k(t) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^+} B_k(t) = 0$.

C2 (*Неотрицателност и обхват в $(0, 1)$*)

$$B_k(t) \begin{cases} > 0, & \text{ако } t \in (t_{k-1}, t_{k+1}), \\ = 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$B_k(t) < 1$ в (t_{k-1}, t_k) и (t_k, t_{k+1}) , и във всеки от тези отворени интервали $B_k(t)$ взема всички стойности между 0 и 1.

C3 (*Разбиване на единицата – афинна комбинация*)

Множеството от базисни функции образува разбиване на единицата (афинна комбинация) в $[t_1, t_n]$.

$$\sum_{k=1}^n B_k(t) = 1, \quad \forall t \in [t_1, t_n].$$

C4 (*Непрекъснатост и нулева стойност на производните във възлите*)

(a) Ако $t \in (t_{k-1}, t_k)$, то

$$(a1) B_k \in C^\infty(t_{k-1}, t_k);$$

$$(a2) \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} D^j B_k(t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i_{k-1};$$

$$(a3) \lim_{t \rightarrow t_k^-} D^j B_k(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i_k;$$

$$(a4) \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} D^{i_{k-1}+1} B_k(t) \neq 0;$$

$$(a5) \lim_{t \rightarrow t_k^-} D^{i_k+1} B_k(t) \neq 0.$$

(б) Ако $t \in (t_k, t_{k+1})$, то

$$(б1) B_k \in C^\infty(t_k, t_{k+1});$$

$$(б2) \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} D^j B_k(t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i_{k+1};$$

$$(б3) \lim_{t \rightarrow t_k^+} D^j B_k(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i_k;$$

$$(б4) \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} D^{i_{k+1}+1} B_k(t) \neq 0;$$

$$(б5) \lim_{t \rightarrow t_k^+} D^{i_k+1} B_k(t) \neq 0.$$

(в) Ако $t \in (-\infty, t_{k-1})$ или $t \in (t_{k+1}, +\infty)$, то

$$D^j B_k(t) \equiv 0, \quad j = 0, 1, \dots, u$$

$$D^j B_k(t_{k-1}^-) = D^j B_k(t_{k+1}^+) = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

(г) Ако $t = t_l$, $l = k-1, k, k+1$, то

(г1) $D^j B_k(t)$ е непрекъсната в съответния възел със съответното додефиниране:

$$((г1).1) D^j B_k(t_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i_k,$$

$$((г1).2) D^j B_k(t_{k-1}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i_{k-1},$$

$$((г1).3) D^j B_k(t_{k+1}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i_{k+1};$$

(г2) $D^{i+1} B_k(t)$ е прекъсната (от първи тип) в $t = t_l$, $l = k-1, k, k+1$.

C5 (Гладкост на B-сплайна в $[t_0, t_{n+1}]$)

\forall базисна функция е $C^s[t_0, t_{n+1}]$, където $s = \min_{k=1, \dots, n} i_k$.

Забележка 3.4. Производните на B_k притежават свойство $D^j B_k(t_l) = 0$, $l = k - 1, k, k + 1$, $j = 1, \dots, i_l$, защото $D^j B_k$ е полином. В други случаи, например ЕРБС, стойността $D^j B_k(t_l)$, $l = k - 1, k, k + 1$, $j = 1, \dots, i_l$ не съществува. Както и да е, в този примерен случай е все още е вярно, че $D^j B_k(t_l-) = D^j B_k(t_l+) = 0$, $l = k - 1, k, k + 1$, $j = 1, \dots, i_l$, и по тази причина е необходимо додефиниране на стойностите на $D^j B_k(t_l)$. В подточка (21) на **C4** ние даваме формулировка, която е вярна във всички случаи.

Доказателство. Ще докажем всички свойства.

Доказателство на C1

Доказателството на **C1** следва непосредствено от Лема 3.2 и Определение 3.1.

Доказателство на C2

Изследваме $B_k(t)$ за $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Имаме:

$$0 < B_k(t) < 1, \quad \forall t \in (t_{k-1}, t_k). \quad (3.13)$$

От лема 3.2, имаме че $\psi_{k-1}(t)$ е непрекъснатата в t_{k-1} и t_k . Тъй като $B_k(t)$ е интеграл от $\psi_{k-1}(t)$, то е също непрекъснат в (t_{k-1}, t_k) , (виж Определение 3.1), с други думи в $[t_{k-1}, t_k]$.

От това и (3.13) следва, че B_k взема всички стойности между 0 и 1.

Доказателството на **C2** за $t \in [t_k, t_{k+1}]$ е аналогично.

Доказателство на C3

От Определение 3.1 забелязвам, че за всяко $t \in [t_1, t_n]$ имаме само един от следните случаи:

- (а) един B-сплайн $B_i(t_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$;
- (б) два съседни B-сплайна $B_k(t) \neq 0$ и $B_{k+1}(t) \neq 0$, ако $k = 1, \dots, n - 1$, $t \neq t_i$, $i = 1, \dots, n$.

Нека разгледаме случай (а). За $t = t_k$, $k = 1, \dots, n-1$, имаме:

$$\sum_{j=1}^n B_j(t_k) = B_k(t_k) = 1, \quad (3.14)$$

от Определение 3.1 или от Лема 3.2.

Случай (а) на **СЗ** е доказан.

За случай (б) нека вземем единственото k , такова че $t \in (t_k, t_{k+1})$.

Имаме:

$$\sum_{j=1}^n B_j(t) = B_k(t) + B_{k+1}(t),$$

$$B_k(t) + B_{k+1}(t) = S_k \int_t^{t_{k+1}} \psi_k(s) ds + S_k \int_{t_k}^t \psi_k(s) ds = S_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(s) ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

$$S_k = \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(s) ds \right]^{-1}.$$

$$\Rightarrow B_k(t) + B_{k+1}(t) = 1, \quad t \in (t_k, t_{k+1}).$$

Случай (б) на **СЗ** е доказан.

Доказателство на С4

B_k и неговите производни са полиноми в (t_{k-1}, t_k) , следователно $B_k \in C^\infty(t_{k-1}, t_k) \Rightarrow$ (а1).

За да докажем (а2) и (а3) нека означим:

$$(t - t_{k-1})^{i_{k-1}} = \alpha_{k-1}(t), \quad \text{и} \quad (t_k - t)^{i_k} = \beta_{k-1}(t),$$

тогава имаме:

$$\psi_{k-1}(t) = d_{k-1} \alpha_{k-1}(t) \beta_{k-1}(t),$$

където d_{k-1} е константата C_{k-1} умножена със знаменателя на $\psi_{k-1}(t)$.

Тук ще използваме правилото на Лайбниц:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)},$$

или в еквивалентната му форма

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k-n} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

В (a2) ние разглеждаме случая, когато $t \rightarrow t_{k-1}+$, така че имаме:

$$\psi_{k-1}(t) = d_{k-1} \sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} \alpha_{k-1}^{(l)}(t) \beta_{k-1}^{(\nu-l)}(t), \quad \nu = 0, 1, \dots, i_{k-1} - 1.$$

Водещия член на така изведената формула, около t_{k-1} , е $\alpha_{k-1}^{(\nu)}(t) \beta_{k-1}^{(0)}(t)$, който клони към 0, когато $t \rightarrow t_{k-1}+$, ако $\nu = 0, 1, \dots, i_{k-1} - 1$.

Ако $\nu = i_{k-1}$, имаме $\alpha_{k-1}^{(\nu)}(t_{k-1}+) \beta_{k-1}^{(0)}(t_{k-1}+) = \text{const} \neq 0$.

$$\begin{aligned} B_k^{(\nu+1)}(t) \Big|_{t=t_{k-1}+} &= S_{k-1} d_{k-1} \psi_{k-1}^{(\nu)}(t) \Big|_{t=t_{k-1}+} \\ &= S_{k-1} d_{k-1} \left[\sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} \alpha_{k-1}^{(l)}(t) \beta_{k-1}^{(\nu-l)}(t) \right] \Big|_{t=t_{k-1}+} \\ &= S_{k-1} d_{k-1} \left[\alpha_{k-1}^{(\nu)}(t_{k-1}+) \beta_{k-1}^{(0)}(t_{k-1}+) + o\left(\alpha_{k-1}^{(\nu)}(t_{k-1}+) \beta_{k-1}^{(0)}(t_{k-1}+)\right) \right]. \end{aligned}$$

По този начин виждаме, че

$$B_k^{(\nu+1)}(t) \Big|_{t=t_{k-1}+} \begin{cases} = 0, & \text{ако } \nu = 0, 1, \dots, i_{k-1} - 1, \\ \neq 0, & \text{ако } \nu = i_{k-1}. \end{cases}$$

Тук използваме факта, че

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1}^{(i_{k-1}-1)}(t_{k-1}+) &= \alpha_{k-1}^{(i_{k-1}-2)}(t_{k-1}+) = \dots = \alpha_{k-1}^{(0)}(t_{k-1}+) = 0, \text{ и} \\ \alpha_{k-1}^{(i_{k-1})}(t_{k-1}+) &\neq 0, \quad \text{докато } \beta_{k-1}^{(0)}(t_{k-1}+) \neq 0. \end{aligned}$$

Доказахме (a2) за $j = 1, 2, \dots, i_{k-1}$ и (a4) за $j = i_{k-1} + 1$. За $j = 0$ доказателството на (a2) следва от **C1**.

Случаи (a3), (a5), (b1), (b2), (b3), (b4) и (b5) могат да се докажат аналогично.

За да докажем (e), е достатъчно да отбележим, че $B_k \equiv \text{const} = 0$ в $(-\infty, t_{k-1})$ и $(t_{k+1}, +\infty)$, и следователно същото е истина за всички производни на B_k . Всяка редица $B_k(\tau_m)$, $m = 1, 2, \dots$, $\tau \in (-\infty, t_{k-1})$, $\tau_m \rightarrow k_{k-1}-$, или $\tau \in (t_{k+1}, +\infty)$, $\tau_m \rightarrow k_{k-1}+$, ще бъде редицата $0, 0, \dots$, следователно тя има граница $\left(\lim_{t \rightarrow t_{k-1}-}, \text{съответно, } \lim_{t \rightarrow t_{k+1}+} \right)$, която е еквивалентна на 0.

За да докажем (g1), използвайки (a3) и (b3), виждаме че след дефинирането

$$D^j B_k(t) \Big|_{t=t_l} := 0, \quad j = 1, \dots, i_l, l = k-1, k, k+1,$$

производните $D^j B_k$ са непрекъснати в t_l , $l = k-1, k, k+1$ (виж Забележка 3.4). Това доказва $((z1).1)$, $((z1).2)$ и $((z1).3)$, следователно $(z1)$.

За да докажем $(z2)$, е достатъчно да забележим, че лявата и дясна граници в t_l , $l = k-1, k, k+1$ са различни (едната от тях е $= 0$, а другата е $\neq 0$). За t_k лявата и дясна граници са $\neq 0$, но обикновено тези ненулеви стойности са различни една от друга. Това доказва $(z2)$, следователно, (z) и **C4**.

Доказателство на C5

За всяко $k = 1, \dots, n$,

$$B_k \in C^\infty(t_l, t_{l+1}) \quad \text{за всяко } l = 0, \dots, n.$$

Освен това във всички възли t_l , $l = 1, \dots, n$, ние имаме:

$$D^j B_k(t_l-) = D^j B_k(t_l+) = D^j B_k(t_l) = 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

защото $s \leq i_l$ за всяко $l = 1, \dots, n$.

Накрая същото е вярно едностранно в t_0 и t_{n+1} :

$$D^j B_k(t_0+) = D^j B_k(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$D^j B_k(t_{n+1}-) = D^j B_k(t_{n+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

□

Следствие 3.1. Ако в свойство **C2**, вместо отворените интервали (t_{k-1}, t_k) и (t_k, t_{k+1}) , ние вземем затворените интервали $[t_{k-1}, t_k]$ и $[t_k, t_{k+1}]$, то имаме $0 \leq B_k(t) \leq 1$.

Доказателство. Следва от **C2** и **C1**. □

Следствие 3.2. (Разбиване на единицата – конвексна комбинация) Афинната комбинация

$$\sum_{k=1}^n B_k(t) = 1, \forall t \in [t_1, t_n]$$

е конвекс.

Доказателство. Следва от **C3** и **C2**. □

Забележка 3.5. *Лесно може да се докаже, че свойствата на БФБС базисна функция са също валидни и за обобщения случай на В-сплайн 'с интегриране на гърбици' (виж Определение 2.2 на обобщения случай на В-сплайн в Глава 2: Въведение в предмета на В-сплайните, Част 2.4: Представяне на обобщена дефиниция на В-сплайн 'с интегриране на гърбици').*

Глава 4

Изчисление на БФБС. Производни и антипроизводни

Важна тема в случая на ЕРБС е надеждността на изчислението на В-сплайна, поради възможността от поява на препълване на буфера (overflow), обръщение към празен буфер (underflow) и деление на нула при изчислението на степента от рационална функция. В случая на БФБС надеждността на изчислението не е подобен въпрос, защото БФБС са полиноми между съседни възли. По тази причина задачата на тази глава е да пресметне БФБС между съседни възли, използвайки подходящи полиномиални базиси.

В части 4.2, 4.3 и 4.4 ще пресметнем Бета-функция В-сплайна $B_k(t)$ (Определение 3.1) за интервалите (t_k, t_{k+1}) и (t_{k-1}, t_k) , имайки предвид случая на неунифициран (non-uniform) вектор от възли $\{t_k\}_{k=0}^{n+1}$. Ние ще напишем $B_k(t)$ като линейна комбинация на три базиса: Бернщайнов базис за интервала между два съседни възела, 'глобален' мономиален базис и 'локален' мономиален базис. Също така ще изчислим някои от коефициентите във формулата на Бета-функция В-сплайн базисната функция.

4.1 Изчисление на някои константи във формулата на БФБС

Нека изразим някои от коефициентите в формулата за $B_k(t)$, които ще се използват във всички изчисления в следващите части.

От дефиницията на БФБС (Определение 3.1), за $B_k(t)$ в (t_k, t_{k+1}) , имаме:

$$B_k(t) = S_k \int_t^{t_{k+1}} \psi_k(\tau) d\tau, \quad (4.1)$$

където

$$\psi_k(t) = C_k \frac{(t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}}, \quad (4.2)$$

$$S_k = \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt \right]^{-1} \quad (4.3)$$

и

$$C_k = \binom{i_k + i_{k+1}}{i_k}. \quad (4.4)$$

Презаписваме $B_k(t)$:

$$\begin{aligned} B_k(t) &= S_k \int_t^{t_{k+1}} \psi_k(\tau) d\tau \\ &= S_k \int_t^{t_{k+1}} C_k \frac{(\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}} d\tau \\ &= S_k \int_t^{t_{k+1}} d_k (\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}} d\tau \\ &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} (\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}} d\tau \\ &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Или

$$B_k(t) = S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (4.5)$$

където

$$d_k = C_k \frac{1}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}} = \frac{(i_k + i_{k+1})!}{i_k! i_{k+1}!} \frac{1}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}} \quad (4.6)$$

и

$$\varphi_k(\tau) = (\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}}. \quad (4.7)$$

За пресмятането на S_k ще използваме Ойлеровата бета функция (Euler beta function).

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} du,$$

където Γ е Гама функцията (Gamma function)

$$\Gamma(m) = (m-1)!.$$

Имаме:

$$[S_k]^{-1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_k \frac{(t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}} dt$$

Нека отбележим

$$u = \frac{(t - t_k)}{(t_{k+1} - t_k)}, \quad t = t_k + (t_{k+1} - t_k)u, \quad [t_k, t_{k+1}] \rightarrow [0, 1],$$

тогава

$$\begin{aligned} [S_k]^{-1} &= C_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1}}} dt \\ &= C_k (t_{k+1} - t_k) \int_0^1 u^{i_k} (1-u)^{i_{k+1}} du \\ &= C_k (t_{k+1} - t_k) \frac{\Gamma(i_k + 1)\Gamma(i_{k+1} + 1)}{\Gamma(i_k + i_{k+1} + 2)} \\ &= C_k (t_{k+1} - t_k) \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k + i_{k+1} + 1)!} \\ &= \binom{i_k + i_{k+1}}{i_k} (t_{k+1} - t_k) \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k + i_{k+1} + 1)!} \\ &= (t_{k+1} - t_k) \frac{(i_k + i_{k+1})!}{i_k! i_{k+1}!} \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k + i_{k+1} + 1)!} \\ &= \frac{t_{k+1} - t_k}{i_k + i_{k+1} + 1} \end{aligned}$$

Така за S_k имаме:

$$S_k = \frac{i_k + i_{k+1} + 1}{t_{k+1} - t_k} \quad (4.8)$$

По същия начин, със съответните промени, за $B_k(t)$ в (t_{k-1}, t_k) , имаме:

$$B_k(t) = S_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \psi_{k-1}(\tau) d\tau, \quad (4.9)$$

където

$$\psi_{k-1}(t) = C_{k-1} \frac{(t - t_{k-1})^{i_{k-1}} (t_k - t)^{i_k}}{(t_k - t_{k-1})^{i_{k-1} + i_k}}, \quad (4.10)$$

$$S_{k-1} = \left[\int_{t_{k-1}}^t \psi_{k-1}(t) dt \right]^{-1}, \quad (4.11)$$

и

$$C_{k-1} = \binom{i_{k-1} + i_k}{i_{k-1}}. \quad (4.12)$$

Или

$$B_k(t) = S_{k-1} d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau, \quad (4.13)$$

където

$$\varphi_{k-1}(\tau) = (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}} (t_k - \tau)^{i_k}, \quad (4.14)$$

$$d_{k-1} = C_{k-1} \frac{1}{(t_k - t_{k-1})^{i_{k-1} + i_k}} = \frac{(i_{k-1} + i_k)!}{i_{k-1}! i_k!} \frac{1}{(t_k - t_{k-1})^{i_{k-1} + i_k}} \quad (4.15)$$

и

$$S_{k-1} = \frac{i_{k-1} + i_k + 1}{t_k - t_{k-1}}. \quad (4.16)$$

4.2 Представяне на БФБС в Бернцайнов базис

Полиномите на Бернцайн от степен n се дефинират като:

$$b_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n,$$

където $\binom{n}{i}$ е биномен коефициент.

Ще изчислим $B_k(t)$ чрез интегриране по части. Първо ще разгледаме интервала (t_k, t_{k+1}) .

$$B_k(t) = S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau &= \int_t^{t_{k+1}} (\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}} d\tau = \frac{(-1)}{i_{k+1} + 1} \int_t^{t_{k+1}} (\tau - t_k)^{i_k} d(t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}+1} \\ &= \frac{1}{i_{k+1} + 1} (t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+1} + \frac{i_k}{i_{k+1} + 1} \int_t^{t_{k+1}} (\tau - t_k)^{i_k-1} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}+1} d\tau \\ &= \frac{1}{i_{k+1} + 1} (t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+1} \\ &\quad + \frac{i_k}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2)} \int_t^{t_{k+1}} (\tau - t_k)^{i_k-1} d(t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}+2} \\ &= \frac{1}{i_{k+1} + 1} (t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+1} + \frac{i_k}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2)} (t - t_k)^{i_k-1} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+2} \\ &\quad + \frac{i_k}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2)} \int_t^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}+2} d(\tau - t_k)^{i_k-1} \\ &= \frac{1}{i_{k+1} + 1} (t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+1} + \frac{i_k}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2)} (t - t_k)^{i_k-1} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 2}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2) \dots (i_{k+1} + i_k)} (t - t_k)(t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+i_k} \\ &\quad + (-1) \frac{i_k(i_k - 1) \dots 1}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2) \dots (i_{k+1} + i_k)} \int_t^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}+i_k} d\tau \\ &= \frac{1}{i_{k+1} + 1} (t - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+1} + \frac{i_k}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2)} (t - t_k)^{i_k-1} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 2}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2) \dots (i_{k+1} + i_k)} (t - t_k)(t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+i_k} \\ &\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 1}{(i_{k+1} + 1)(i_{k+1} + 2) \dots (i_{k+1} + i_k + 1)} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+i_k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{i_k} \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k - j)!(i_{k+1} + 1 + j)!} (t - t_k)^{i_k-j} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1}+1+j} \end{aligned}$$

Нека се погрижим за коефициентите S_k и d_k .

$$\begin{aligned}
 B_k(t) &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau \\
 &= S_k d_k \sum_{j=0}^{i_k} \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k - j)! (i_{k+1} + 1 + j)!} (t - t_k)^{i_k - j} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1} + 1 + j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} S_k d_k \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k - j)! (i_{k+1} + 1 + j)!} (t - t_k)^{i_k - j} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1} + 1 + j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} \frac{(i_k + i_{k+1} + 1)!}{i_k! i_{k+1}!} \frac{1}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1} + 1}} \frac{i_k! i_{k+1}!}{(i_k - j)! (i_{k+1} + 1 + j)!} (t - t_k)^{i_k - j} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1} + 1 + j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} \frac{(i_k + i_{k+1} + 1)!}{(i_k - j)! (i_{k+1} + 1 + j)!} \frac{(t - t_k)^{i_k - j} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1} + 1 + j}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1} + 1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} \binom{i_k + i_{k+1} + 1}{i_k - j} \frac{(t - t_k)^{i_k - j} (t_{k+1} - t)^{i_{k+1} + 1 + j}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1} + 1}}
 \end{aligned}$$

Правим следната промяна на индекса j :

$$\begin{aligned}
 i_k - j &= l, & l &= i_k - 0, \dots, i_k - j, & j &= 0, \dots, i_k, \\
 j &= i_k - l,
 \end{aligned}$$

и получаваме

$$B_k(t) = \sum_{l=i_k}^0 \binom{i_k + i_{k+1} + 1}{l} \frac{(t - t_k)^l (t_{k+1} - t)^{i_k + i_{k+1} + 1 - l}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1} + 1}}$$

Така, като окончателен израз за $B_k(t)$ в Бернцайнов базис за интервала (t_k, t_{k+1}) имаме:

$$B_k(t) = \sum_{l=0}^{i_k} \binom{i_k + i_{k+1} + 1}{l} \frac{(t - t_k)^l (t_{k+1} - t)^{i_k + i_{k+1} + 1 - l}}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k + i_{k+1} + 1}} \quad (4.17)$$

Изчисляваме $B_k(t)$ в интервала (t_{k-1}, t_k) по същия начин, но със съответните промени.

$$B_k(t) = S_{k-1} d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau &= \int_{t_{k-1}}^t (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}} (t_k - \tau)^{i_k} d\tau \\
&= \frac{1}{i_{k-1} + 1} \int_{t_{k-1}}^t (t_k - \tau)^{i_k} d(\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} \\
&= \frac{1}{i_{k-1} + 1} (t_k - t)^{i_k} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} + \frac{i_k}{i_{k-1} + 1} \int_{t_{k-1}}^t (t_k - \tau)^{i_k-1} (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} d\tau \\
&= \frac{1}{i_{k-1} + 1} (t_k - t)^{i_k} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} \\
&\quad + \frac{i_k}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2)} \int_{t_{k-1}}^t (t_k - \tau)^{i_k-1} d(\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}+2} \\
&= \frac{1}{i_{k-1} + 1} (t_k - t)^{i_k} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} + \frac{i_k}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2)} (t_k - t)^{i_k-1} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+2} \\
&\quad + (-1) \frac{i_k}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2)} \int_{t_{k-1}}^t (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}+2} d(t_k - \tau)^{i_k-1} \\
&= \frac{1}{i_{k-1} + 1} (t_k - t)^{i_k} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} + \frac{i_k}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2)} (t_k - t)^{i_k-1} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+2} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 2}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2) \dots (i_{k-1} + i_k)} (t_k - t)(t - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k} \\
&\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 1}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2) \dots (i_{k-1} + i_k)} \int_{t_{k-1}}^t (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k} d\tau \\
&= \frac{1}{i_{k-1} + 1} (t_k - t)^{i_k} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+1} + \frac{i_k}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2)} (t_k - t)^{i_k-1} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+2} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 2}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2) \dots (i_{k-1} + i_k)} (t_k - t)(t - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k} \\
&\quad + \frac{i_k(i_k - 1) \dots 1}{(i_{k-1} + 1)(i_{k-1} + 2) \dots (i_{k-1} + i_k + 1)} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i_k} \frac{i_k! i_{k-1}!}{(i_k - j)! (i_{k-1} + 1 + j)!} (t_k - t)^{i_k-j} (t - t_{k-1})^{i_{k-1}+1+j}
\end{aligned}$$

Нека се погрижим за коефициентите S_{k-1} и d_{k-1} .

$$\begin{aligned}
 B_k(t) &= S_{k-1}d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau \\
 &= S_{k-1}d_{k-1} \sum_{j=0}^{i_k} \frac{i_k!i_{k-1}!}{(i_k-j)!(i_{k-1}+1+j)!} (t_k-t)^{i_k-j} (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+1+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} S_{k-1}d_{k-1} \frac{i_k!i_{k-1}!}{(i_k-j)!(i_{k-1}+1+j)!} (t_k-t)^{i_k-j} (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+1+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} \frac{(i_{k-1}+i_k+1)!}{i_k!i_{k-1}!} \frac{1}{(t_{k+1}-t_k)^{i_{k-1}+i_k+1}} \frac{i_k!i_{k-1}!}{(i_k-j)!(i_{k-1}+1+j)!} (t_k-t)^{i_k-j} (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+1+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} \frac{(i_{k-1}+i_k+1)!}{(i_k-j)!(i_{k-1}+1+j)!} \frac{(t_k-t)^{i_k-j} (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+1+j}}{(t_k-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{i_k} \binom{i_{k-1}+i_k+1}{i_k-j} \frac{(t_k-t)^{i_k-j} (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+1+j}}{(t_k-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1}}
 \end{aligned}$$

Правим следната промяна на индекса j :

$$\begin{aligned}
 i_k - j &= l, & l &= i_k - 0, \dots, i_k - j, & l &= 0, \dots, i_k, \\
 j &= i_k - l.
 \end{aligned}$$

Тогава получаваме

$$B_k(t) = \sum_{l=i_k}^0 \binom{i_{k-1}+i_k+1}{l} \frac{(t_k-t)^l (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1-l}}{(t_k-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1}}$$

Така, като окончателен израз за $B_k(t)$ в Бернщайнов базис за интервала (t_{k-1}, t_k) имаме:

$$B_k(t) = \sum_{l=0}^{i_k} \binom{i_{k-1}+i_k+1}{l} \frac{(t_k-t)^l (t-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1-l}}{(t_k-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1}} \quad (4.18)$$

4.3 Представяне на БФБС в 'глобален' мономиален базис

Ще запишем $B_k(t)$ в 'глобален' мономиален базис в интервала (t_k, t_{k+1}) . Нека разгледаме базиса: $1, t, t^2, \dots, t^{i_k+i_{k+1}}$.

Имаме:

$$B_k(t) = S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau$$

Изчисляваме $\varphi_k(\tau)$ чрез използването на Биномиалната теорема (Binomial theorem):

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}} \\ &= (-1)^{i_{k+1}} (\tau - t_k)^{i_k} (\tau - t_{k+1})^{i_{k+1}} \\ &= (-1)^{i_{k+1}} \left(\sum_{\mu=0}^{i_k} \binom{i_k}{\mu} (-1)^{i_k-\mu} t_k^{i_k-\mu} \tau^\mu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{i_{k+1}} \binom{i_{k+1}}{\nu} (-1)^{i_{k+1}-\nu} t_{k+1}^{i_{k+1}-\nu} \tau^\nu \right) \\ &= (-1)^{i_{k+1}} \sum_{\mu=0}^{i_k} \sum_{\nu=0}^{i_{k+1}} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{\nu} (-1)^{i_k+i_{k+1}-\mu-\nu} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-\nu} \tau^{\mu+\nu} \end{aligned}$$

Правим смяна на индексите във вътрешната сума:

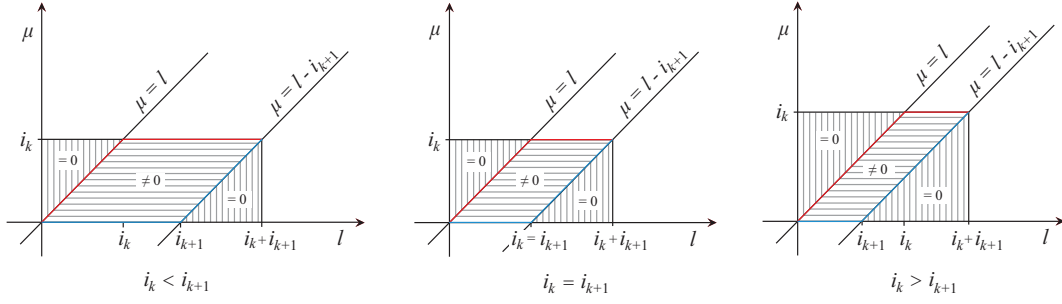
$$\begin{aligned} \mu + \nu &= l, \quad l = \mu + 0, \dots, \mu + i_{k+1}, \quad \mu = 0, \dots, i_k, \\ \nu &= l - \mu. \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (-1)^{i_{k+1}} \sum_{\mu=0}^{i_k} \sum_{l=\mu}^{\mu+i_{k+1}} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} (-1)^{i_k+i_{k+1}-l} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu} \tau^l \\ &= (-1)^{i_{k+1}} \sum_{\mu=0}^{i_k} \sum_{l=\mu}^{\mu+i_{k+1}} C_{k;l,\mu} \tau^l \\ &= (-1)^{i_{k+1}} \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \left(\sum_{\mu=0}^{i_k} C_{k;l,\mu} \right) \tau^l, \end{aligned}$$

където, с добавянето на нули за $C_{k;l,\mu}$, където е подходящо, имаме:

$$C_{k;l,\mu} = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 \leq l < \mu, \\ \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} (-1)^{i_k+i_{k+1}-l} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu}, & \text{ако } \mu \leq l \leq \mu + i_{k+1}, \\ 0, & \text{ако } \mu + i_{k+1} < l \leq i_k + i_{k+1}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Виж Фигура 4.1.



Фигура 4.1: Нулеви и ненулеви стойности, зависещи от коефициента $C_{k;l,\mu}$, ((4.20), (4.21), (4.22) и (4.23)). $f(l)$ е начертана в червено, а $g(l)$ – в синьо.

$$g(l) \leq \mu \leq f(l) \quad (4.21)$$

$$f(l) = \begin{cases} l, & \text{ако } 0 \leq l < i_k, \\ i_k, & \text{ако } i_k \leq l \leq i_k + i_{k+1}. \end{cases} \quad (4.22)$$

$$g(l) = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 \leq l \leq i_{k+1}, \\ l - i_k, & \text{ако } i_{k+1} \leq l \leq i_k + i_{k+1}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Така може да запишем $\varphi_k(\tau)$ като:

$$\varphi_k(\tau) = (-1)^{i_{k+1}} \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^l \left(\sum_{\mu=g(l)}^{f(l)} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} (-1)^{i_k+i_{k+1}-l} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu} \right),$$

или с

$$f(l) = \min\{l, i_k\},$$

$$g(l) = \max\{0, l - i_{k+1}\},$$

получаваме:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (-1)^{i_{k+1}} \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^l \left(\sum_{\mu=\max\{0, l-i_{k+1}\}}^{\min\{l, i_k\}} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} (-1)^{i_k+i_{k+1}-l} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu} \right) \\ &= (-1)^{i_{k+1}} \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^l (-1)^{i_k+i_{k+1}-l} \left(\sum_{\mu=\max\{0, l-i_{k+1}\}}^{\min\{l, i_k\}} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^l (-1)^{i_k-l} \left(\sum_{\mu=\max\{0, l-i_{k+1}\}}^{\min\{l, i_k\}} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu} \right). \end{aligned}$$

Така получаваме, че:

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^l \alpha_{k,l} = R_{k;1}, \quad (4.24)$$

където

$$\alpha_{k,l} = (-1)^{i_k-l} \left(\sum_{\mu=\max\{0, l-i_{k+1}\}}^{\min\{l, i_k\}} \binom{i_k}{\mu} \binom{i_{k+1}}{l-\mu} t_k^{i_k-\mu} t_{k+1}^{i_{k+1}-l+\mu} \right). \quad (4.25)$$

Имайки на предвид симетрията в φ_k , можем да запишем φ_k като:

$$\varphi_k(\tau) = (-1)^{i_k} (t_k - \tau)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}},$$

и избирайки различна смяна на индексите в (4.19):

$$\begin{aligned} \mu + \nu &= \lambda, & \lambda &= 0 + \nu, \dots, i_k + \nu, & \nu &= 0, \dots, i_{k+1}, \\ \mu &= \lambda - \nu, \end{aligned}$$

накрая получаваме симетричен израз за $\varphi_k(\tau)$:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (-1)^{i_k} \sum_{\lambda=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^\lambda (-1)^{i_k+i_{k+1}-\lambda} \left(\sum_{\nu=\max\{0, \lambda-i_k\}}^{\min\{\lambda, i_{k+1}\}} \binom{i_k}{\lambda-\nu} \binom{i_{k+1}}{\nu} t_k^{i_k-\lambda+\nu} t_{k+1}^{i_{k+1}-\nu} \right) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^\lambda (-1)^{i_{k+1}-\lambda} \left(\sum_{\nu=\max\{0, \lambda-i_k\}}^{\min\{\lambda, i_{k+1}\}} \binom{i_k}{\lambda-\nu} \binom{i_{k+1}}{\nu} t_k^{i_k-\lambda+\nu} t_{k+1}^{i_{k+1}-\nu} \right). \end{aligned}$$

Или

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{\lambda=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^\lambda \beta_{k,\lambda} = R_{k;2}, \quad (4.26)$$

където

$$\beta_{k,\lambda} = (-1)^{i_{k+1}-\lambda} \left(\sum_{\nu=\max\{0, \lambda-i_k\}}^{\min\{\lambda, i_{k+1}\}} \binom{i_k}{\lambda-\nu} \binom{i_{k+1}}{\nu} t_k^{i_k-\lambda+\nu} t_{k+1}^{i_{k+1}-\nu} \right). \quad (4.27)$$

Очевидно $R_{k;1} = R_{k;2}$, което дава две различни представяния за коефициентите пред τ^l .

Сега можем да интегрираме:

$$\begin{aligned}
 B_k(t) &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau \\
 &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \tau^l \alpha_{k,l} d\tau \\
 &= S_k d_k \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \frac{1}{l+1} (\tau^{l+1} \alpha_{k,l}) \Big|_t^{t_{k+1}} \\
 &= S_k d_k \left(\sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \frac{1}{l+1} t_{k+1}^{l+1} \alpha_{k,l} - \sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}} \frac{1}{l+1} t^{l+1} \alpha_{k,l} \right) \\
 &= S_k d_k \left(\sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}+1} \frac{1}{l+1} t_{k+1}^{l+1} \alpha_{k,l} - \sum_{\lambda=1}^{i_k+i_{k+1}+1} \frac{1}{\lambda} \alpha_{k,\lambda-1} t^\lambda \right)
 \end{aligned}$$

Като крайно представяне на $B_k(t)$ в интервала (t_k, t_{k+1}) , записано в 'глобален' мономиален базис, имаме:

$$B_k(t) = \binom{i_k + i_{k+1}}{i_k} \frac{i_k + i_{k+1} + 1}{(t_{k+1} - t_k)^{i_k+i_{k+1}+1}} \left(\sum_{l=0}^{i_k+i_{k+1}+1} \frac{1}{l+1} t_{k+1}^{l+1} \alpha_{k,l} - \sum_{\lambda=1}^{i_k+i_{k+1}+1} \frac{1}{\lambda} \alpha_{k,\lambda-1} t^\lambda \right) \quad (4.28)$$

където $\alpha_{k,l}$ е дадена в (4.25).

Ще запишем $B_k(t)$ в 'глобален' мономиален базис в интервала (t_{k-1}, t_k) .

Нека разгледаме базиса: $1, t, t^2, \dots, t^{i_{k-1}+i_k}$.

Имаме:

$$B_k(t) = S_{k-1} d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau$$

Аналогично на изчисленията за $\varphi_k(\tau)$ в (t_k, t_{k+1}) , ((4.24), (4.25), (4.26) и (4.27)), за $\varphi_{k-1}(\tau)$ в (t_{k-1}, t_k) имаме:

$$\varphi_{k-1}(\tau) = \sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k} \tau^l \alpha_{k-1,l} = R_{k-1;1}, \quad (4.29)$$

където

$$\alpha_{k-1,l} = (-1)^{i_{k-1}-l} \left(\sum_{\mu=\max\{0, l-i_k\}}^{\min\{l, i_{k-1}\}} \binom{i_{k-1}}{\mu} \binom{i_k}{l-\mu} t_{k-1}^{i_{k-1}-\mu} t_k^{i_k-l+\mu} \right). \quad (4.30)$$

И симетрично

$$\varphi_{k-1}(\tau) = \sum_{\lambda=0}^{i_{k-1}+i_k} \tau^\lambda \beta_{k-1,\lambda} = R_{k-1;2}, \quad (4.31)$$

където

$$\beta_{k-1,l} = (-1)^{i_k-\lambda} \left(\sum_{\nu=\max\{0, \lambda-i_{k-1}\}}^{\min\{\lambda, i_k\}} \binom{i_{k-1}}{\lambda-\nu} \binom{i_k}{\nu} t_{k-1}^{i_{k-1}-\lambda+\nu} t_k^{i_k-\nu} \right). \quad (4.32)$$

И отново е очевидно, че $R_{k-1;1} = R_{k-1;2}$.

Сега можем да интегрираме:

$$\begin{aligned} B_k(t) &= S_{k-1} d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau \\ &= S_{k-1} d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k} \tau^l \beta_{k-1,l} d\tau \\ &= S_{k-1} d_{k-1} \sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k} \frac{1}{l+1} (\tau^{l+1} \beta_{k-1,l}) \Big|_{t_{k-1}}^t \\ &= S_{k-1} d_{k-1} \left(\sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k} \frac{1}{l+1} t^{l+1} \beta_{k-1,l} - \sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k} \frac{1}{l+1} t_{k-1}^{l+1} \beta_{k-1,l} \right) \\ &= S_{k-1} d_{k-1} \left(\sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k+1} \frac{1}{l+1} t^{l+1} \beta_{k-1,l} - \sum_{\lambda=1}^{i_{k-1}+i_k+1} \frac{1}{\lambda} \beta_{k-1,\lambda-1} t_{k-1}^\lambda \right) \end{aligned}$$

Като крайно представяне на $B_k(t)$ в интервала (t_{k-1}, t_k) , записано в 'глобален' мономиален базис, имаме:

$$B_k(t) = \binom{i_{k-1}+i_k}{i_{k-1}} \frac{i_{k-1}+i_k+1}{(t_k-t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1}} \left(\sum_{l=0}^{i_{k-1}+i_k+1} \frac{1}{l+1} t^{l+1} \beta_{k-1,l} - \sum_{\lambda=1}^{i_{k-1}+i_k+1} \frac{1}{\lambda} \beta_{k-1,\lambda-1} t_{k-1}^\lambda \right), \quad (4.33)$$

където $\beta_{k-1,l}$ е дадена в (4.32).

4.4 Представяне на БФБС в 'локален' мономиален базис

Ще запишем $B_k(t)$ в 'локален' мономиален базис в интервала (t_k, t_{k+1}) . Нека разгледаме мономиалния базис, центриран около точката t_k : $1, t-t_k, (t-t_k)^2, \dots, (t-t_k)^{i_k+i_{k+1}}$.

Имаме:

$$B_k(t) = S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau$$

Изчисляваме $\varphi_k(\tau)$:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (\tau - t_k)^{i_k} (t_{k+1} - \tau)^{i_{k+1}} \\ &= (\tau - t_k)^{i_k} [(t_{k+1} - t_k) - (\tau - t_k)]^{i_{k+1}} \\ &= (\tau - t_k)^{i_k} \sum_{j=0}^{i_{k+1}} \binom{i_{k+1}}{j} (t_{k+1} - t_k)^{i_{k+1}-j} (-1)^j (\tau - t_k)^j \\ &= \sum_{j=0}^{i_{k+1}} \binom{i_{k+1}}{j} (t_{k+1} - t_k)^{i_{k+1}-j} (\tau - t_k)^{i_k+j} (-1)^j \end{aligned}$$

Правим следната промяна на индекса j :

$$\begin{aligned} i_k + j = l, \quad l = i_k + 0, \dots, i_k + j, \quad j = 0, \dots, i_{k+1}, \\ j = l - i_k. \end{aligned}$$

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{l=i_k}^{i_k+i_{k+1}} (\tau - t_k)^l \left[\binom{i_{k+1}}{l-i_k} (t_{k+1} - t_k)^{i_k+i_{k+1}-l} (-1)^{l-i_k} \right]$$

Сега можем да интегрираме:

$$\begin{aligned} B_k(t) &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \varphi_k(\tau) d\tau \\ &= S_k d_k \int_t^{t_{k+1}} \sum_{l=i_k}^{i_k+i_{k+1}} (\tau - t_k)^l \left[\binom{i_{k+1}}{l-i_k} (t_{k+1} - t_k)^{i_k+i_{k+1}-l} (-1)^{l-i_k} \right] d\tau \\ &= S_k d_k \sum_{l=i_k}^{i_k+i_{k+1}} \frac{1}{l+1} [(t_{k+1} - t_k)^{l+1} - (t - t_k)^{l+1}] \left[\binom{i_{k+1}}{l-i_k} (t_{k+1} - t_k)^{i_k+i_{k+1}-l} (-1)^{l-i_k} \right] \end{aligned}$$

Така за B_k в (t_k, t_{k+1}) имаме:

$$B_k(t) = S_k d_k \sum_{l=i_k}^{i_k+i_{k+1}} \frac{1}{l+1} [(t_{k+1}-t_k)^{l+1} - (t-t_k)^{l+1}] \left[\binom{i_{k+1}}{l-i_k} (t_{k+1}-t_k)^{i_k+i_{k+1}-l} (-1)^{l-i_k} \right], \quad (4.34)$$

където

$$S_k d_k = \binom{i_k+i_{k+1}}{i_k} \frac{i_k+i_{k+1}+1}{(t_{k+1}-t_k)^{i_k+i_{k+1}+1}}.$$

Ще запишем $B_k(t)$ в 'локален' мономиален базис в интервала (t_{k-1}, t_k) .

Нека разгледаме базиса: $1, t-t_k, (t-t_k)^2, \dots, (t-t_k)^{i_{k-1}+i_k}$.

Имаме:

$$B_k(t) = S_{k-1} d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau$$

Изчисляваме $\varphi_{k-1}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{k-1}(\tau) &= (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}} (t_k - \tau)^{i_k} \\ &= (-1)^{i_k} (\tau - t_k)^{i_k} (\tau - t_{k-1})^{i_{k-1}} \\ &= (-1)^{i_k} (\tau - t_k)^{i_k} [(t_k - t_{k-1}) + (\tau - t_k)]^{i_{k-1}} \\ &= (-1)^{i_k} (\tau - t_k)^{i_k} \sum_{j=0}^{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{j} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}-j} (\tau - t_k)^j \\ &= (-1)^{i_k} \sum_{j=0}^{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{j} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}-j} (\tau - t_k)^{i_k+j} \\ &= \sum_{j=0}^{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{j} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}-j} (\tau - t_k)^{i_k+j} (-1)^{i_k} \end{aligned}$$

Правим следната промяна на индекса j :

$$i_k + j = l, \quad l = i_k + 0, \dots, i_k + j, \quad j = 0, \dots, i_{k-1},$$

$$j = l - i_k.$$

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{l=i_k}^{i_{k-1}+i_k} (\tau - t_k)^l \left[\binom{i_{k-1}}{l-i_k} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k-l} (-1)^{i_k} \right]$$

Сега можем да интегрираме:

$$\begin{aligned}
 B_k(t) &= S_{k-1}d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \varphi_{k-1}(\tau) d\tau \\
 &= S_{k-1}d_{k-1} \int_{t_{k-1}}^t \sum_{l=i_k}^{i_{k-1}+i_k} (\tau - t_k)^l \left[\binom{i_{k-1}}{l - i_k} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k-l} (-1)^{i_k} \right] d\tau \\
 &= S_{k-1}d_{k-1} \sum_{l=i_k}^{i_{k-1}+i_k} \frac{1}{l+1} [(t_k - t_{k-1})^{l+1} - (t - t_k)^{l+1}] \left[\binom{i_{k-1}}{l - i_k} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k-l} (-1)^{i_k} \right]
 \end{aligned}$$

Така за B_k в (t_{k-1}, t_k) имаме:

$$B_k(t) = S_{k-1}d_{k-1} \sum_{l=i_k}^{i_{k-1}+i_k} \frac{1}{l+1} [(t_k - t_{k-1})^{l+1} - (t - t_k)^{l+1}] \left[\binom{i_{k-1}}{l - i_k} (t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k-l} (-1)^{i_k} \right], \quad (4.35)$$

където

$$S_{k-1}d_{k-1} = \binom{i_{k-1} + i_k}{i_{k-1}} \frac{i_{k-1} + i_k + 1}{(t_k - t_{k-1})^{i_{k-1}+i_k+1}}.$$

4.5 Представяне на БФБС в Бернцайнов базис в целия домейн

Възможно е, да се изчисли БФБС сплайна чрез Бернцайнови полиноми върху интервала $[t_{k-1}, t_{k+1}]$. Така ще получим опростяване на формулата за изчисление на БФБС, защото вместо с два израза, дефиниращи БФБС в двата му съседни интервала от дефиниционната му област, ще работим само с един върху цялата област.

Това изчисление е с по-голяма сложност и няма да бъде правено тук.

Глава 5

Функционални криви в 2D

В тази глава ще обсъдим интерполацията на функционални криви в 2D чрез използването на Бета-функция В-сплайна. В част 5.1 ние дефинираме общата БФС основна функция като линейна комбинация от Бета-функция В-сплайни, чиито коефициенти могат да бъдат функции, не непременно константи.

Стойностите на тези функции могат да бъдат скалари (реални), вектори или точки. Тези "коефициентни функции" ще бъдат наричани "локални функции". В част 5.2 ние дискутираме кратностите във вектора от възли и непрекъснатите свойства на съставните сплайн функции, които тези кратности генерират.

Ермитовото интерполационно свойство се изследва и дискутира в част 5.3. Дадено е кратко обяснение как да интерполираме дадена функция с помощта на Бета-функция В-сплайн функция.

5.1 Бета-функция В-сплайн функции

Причината за представяне на Бета-функция В-сплайните е да ги използваме като базисни функции (blending functions), обикновено в В-сплайн функции.

При обикновените полиномиални В-сплайни, между два съседни възела съществува полином от степен d , съставен от барицентрична комбинация на $d+1$ коефициента,

претеглени от $d + 1$ В-сплайна. При БФБС функцията в един възлов сегмент има само две базисни функции, които са различни от нула.

Първо ще разгледаме случая, когато всички коефициенти в линейната комбинация от БФБС са константи (скалари, вектори или точки):

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i B_i(t), \quad t \in [t_1, t_n]$$

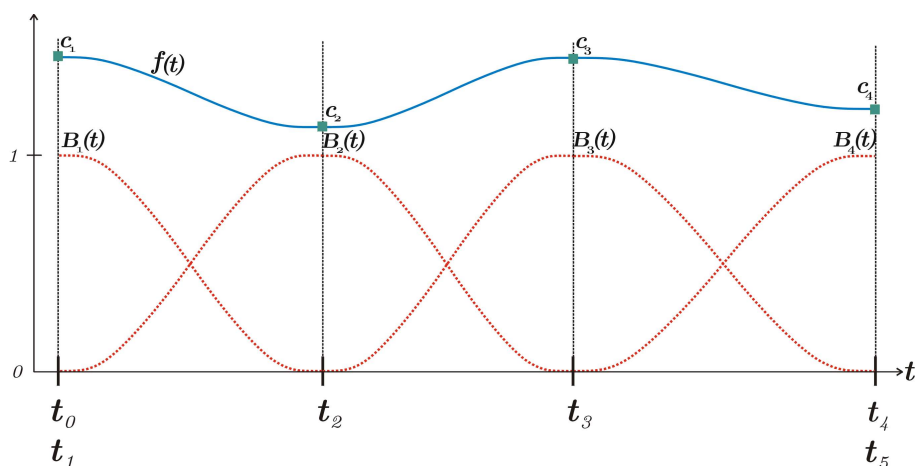
От Теорема 3.1 следва, че БФБС интерполират всички коефициенти във възлите. Ние също имаме, че във всеки възел t_l те са нули, $l = 1, \dots, n$. Във всеки сегмент (между два възела), скаларната БФБС функция ще бъде скалирана и транслирана версия (афинно изображение (affine mapping)) на БФБС базисната функция. Тя ще интерполира коефициентите, а производните ще имат нулеви стойности, където БФБС базисната функция има производни с нулеви стойности. Това поведение е показано на Фигура 5.1 и във функция (5.2) по-долу. Тогава ние имаме следната функция във вътрешността на интервала между два възела

$$f(t) = c_i B_i(t) + c_{i+1} B_{i+1}(t), \quad \text{ако } t_i < t < t_{i+1}. \quad (5.1)$$

От свойство **C3** в Теорема 3.1 следва, че (5.1) може да се презапише като

$$f(t) = c_{i+1} + (c_i - c_{i+1}) B_i(t), \quad \text{ако } t_i < t < t_{i+1}. \quad (5.2)$$

Второ, ще разгледаме общия случай на не-константни (скалари, вектори или точки) локални функции като коефициенти (показано на Фигура 5.2). Дефиниционната област на тези функции трябва да е същата, като дефиниционната област на съответните БФБС базисни функции. Това значи, че локалната функция с индекс k е дефинирана (и обикновено ограничена) в интервала (t_{k-1}, t_{k+1}) . Практическо решение е да направим изображение на дефиниционната област на базисните функции в локалните (виж Определение 5.3 по-нататък в тази част). Сега следва дефиниция на множество от функционални пространства (function spaces), която е аналогична на дефиницията на локални функции в случая на Експо-рационалните В-сплайни.



Фигура 5.1: Приблизителна 'глобална' Бета-функция В-сплайнова функция $f(t)$ (синьо) с четири скаларни коефициента $\{c_i\}_{i=1}^4$ (зелено). Глобалната функция е линейна комбинация на коефициентите с Бета-функцията В-сплайните $\{B_i(t)\}_{i=1}^4$ (червено). Глобалната функция интерполира коефициентите, а всички производни до ред i_k са нули във всеки възел t_k . Векторът от възли $\{t_i\}_{i=0}^5$ също е маркиран и има многократни възли в двата края (непрекъснатост, показана в част 5.2).

Определение 5.1. Дефинираме следното множество от функционални пространства, за да характеризираме локални функции $l_k(t)$,

$$\mathfrak{F}(B_k) = \{l : D^j(l(t)B_k(t)) = 0 \quad \text{за } j = 0, 1, \dots, i_{k-1} \text{ и } t = t_{k-1}, \\ \text{или } j = 0, 1, \dots, i_{k+1} \text{ и } t = t_{k+1}, \quad (5.3) \\ \text{и } l \text{ е полиномиална функция}\},$$

където B_k , $k = 1, \dots, n$ са дефинирани в Определение 3.1.

Забележка 5.1. Възможно е също да използване локални функции l различни от полиноми (които все още удовлетворяват $D^j(l(t)B_k(t)) = 0$ за споменатото j), но тук ще разгледаме само полиномиалния случай, защото тогава В-сплайн функциите сами по себе си ще бъдат частично полиномиални (*piecewise polynomial*).

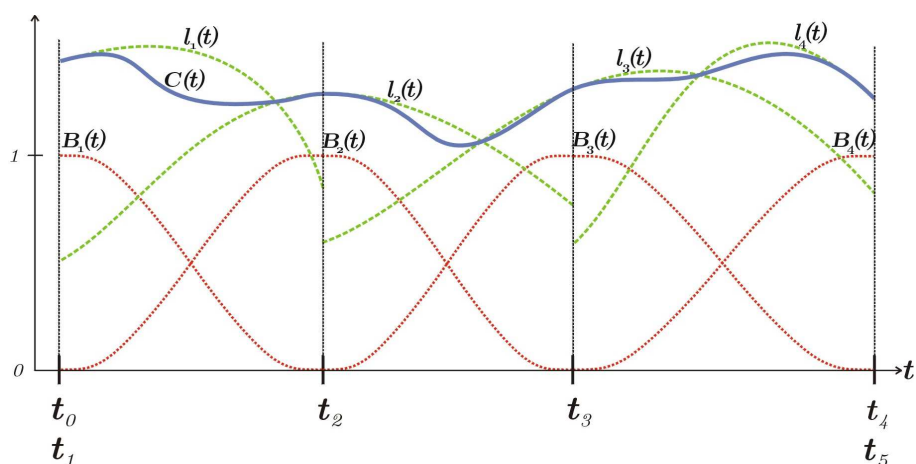
Сега следва дефиницията на Бета-функция В-сплайновата функцията.

Определение 5.2. Бета-функция В-сплайн функцията (БФБС) функция $f(t)$ (със скалар, вектор или точка като стойност) се задава в интервала $(t_1, t_n]$ чрез

$$f(t) = \sum_{k=1}^n l_k(t)B_k(t) \quad \text{ако } t_1 < t \leq t_n,$$

където $l_k(t)$ са локални функции (със скаларна или векторна стойност) в (t_{k-1}, t_{k+1}) , $k = 1, \dots, n$, и $B_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ е дефинирана в Определение 3.1. Допускаме, че $l_k(t) \in \mathfrak{F}(B_k)$.

Точно както обикновените В-сплайн функции, Бета-функция В-сплайн функции: имат базисни функции, дефинира чрез вектор от възли; образуван неотрицателно разбиване на единицата (което също значи, че те не се променят при афинни трансформации). Също така базисните функции имат минимален локален носител (същия както при В-сплайните от 1-ва степен); за типичния случай на прости възли $t_k < t_{k+1}$ свойства **C1**, **C3**, **C4** и **C5**, заедно с $l_k(t) \in \mathfrak{F}(B_k)$, предполагат Ермитова интерполация (дискутирана в част 5.3). Фигура 5.2 ясно показва това. Във всеки възел t_k , "глобалната" функция интерполира не само стойностите на локалните функции, но и производните до ред i_k . Фигурата също показва,



Фигура 5.2: Приблизителна 'глобална' Бета-функция В-сплайн функция $f(t)$ (синьо) с четири локални функции $\{l_i(t)\}_{i=1}^4$ (зелено). Глобалната функция е линейна комбинация на локалните функции с Бета-функцията В-сплайните $\{B_i(t)\}_{i=1}^4$ (червено). Глобалната функция също интерполира всички съществуващи производни на всяка от съседните локални функции в съответния възел t_k , до ред i_k . Векторът от възли $\{t_i\}_{i=0}^5$ също е маркиран и има многократни възли в двата края (непрекъснатост, показана в част 5.2).

че "глобалната" функция минава през всички точки на пресичане между две съседни локални функции. Това е защото "глобалната" функция е афинна комбинация на две и само две локални функции за всяка стойност на аргумента.

Използването на локални функции предлага нова възможност (или предизвикателство в практическото изпълнение), а именно изображение от частите на "глобалната дефиниционна област" в "локалната дефиниционна област". По тази причина следва, че локалните функции трябва да бъдат разделени на функции върху локалната дефиниционна област, това го дефинираме като афинно глобално/локално изображение (affine global/local mapping).

Определение 5.3. Нека дефинираме локалния домейн на локалните функции l_k като

$$I_k = (s_{k0}, s_{k1}) \subset \mathbb{R} \quad \text{където } s_{k0} < s_{k1},$$

и където s_{k0} е началната параметрична стойност, а s_{k1} е крайната параметрична стойност на локалната функция l_k . Глобалното/локално изображение ω_k е изображение на сегмента (t_{k-1}, t_{k+1}) в "глобалния" домейн на Бета-функцията В-сплайна върху домейна I_k ,

$$\omega_k : (t_{k-1}, t_{k+1}) \subset \mathbb{R} \rightarrow I_k.$$

Тогава ω_k е афинно изображение

$$\omega_k(t) = s_{k0} + \frac{t - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}(s_{k1} - s_{k0}). \quad (5.4)$$

Противоположното изображение на I_k в (t_{k-1}, t_{k+1}) е

$$\omega_k^{-1}(s) = t_{k-1} + \frac{s - s_{k0}}{s_{k1} - s_{k0}}(t_{k+1} - t_{k-1}). \quad (5.5)$$

Възможността за конструиране на голямо разнообразие от функции, зависещо от разнообразието на локални функции дава нова "измеримост" на Бета-функция В-сплайна, защото така можем да променяме по свое желание специфичните свойства на функцията. Няколко кратки примера са, че можем да използваме тригонометрични функции, функции на Безие, рационални функции, специални

функции, и др. Локалните функции могат също да бъдат БФБС функции, което увеличава възможността за вложени БФБС функции. Нищо не ограничава възможността локалните функции да са от различен вид.

5.2 Вектори от възли и непрекъснатост

Кратността на възлите е важна тема за Експо-Рационалните В-сплайни (ЕРБС), както и за Бета-функция В-сплайните. В случая на ЕРБС, съвпадението на два последователни възела води до прекъснатост в този единичен възел (Виж [12], Теорема 2.3) и за БФБС случая е точно същия. Следователно няма да разглеждаме този случай подробно тук.

5.3 Ермитови интерполационни свойства

Тук ще разгледаме БФБС аналога на Ермитовите интерполационни свойства на ЕРБС. Ще видим, че за локалните функции е в сила $l_k(t) \in \mathfrak{F}(B_k)$, и Бета-функция В-сплайн функциите имат Ермитови интерполационни свойства.

Основният факт тук е, че

$$D^j B_k(t_k) = 0, \quad \text{ако } k = 1, \dots, n \text{ и } j = 1, 2, \dots, i_k$$

което е свойство **C4**((21).1) в Теорема 3.1. Нека сега увеличим обобщението като използваме функция от по-висока размерност,

$$f : (t_1, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \text{където } 1 \leq d < \infty,$$

и нека имаме на предвид дефиницията на афинното глобално/локално изображение ω_i от Определение 5.3, където s_{i0} е началната параметрична стойност от домейна на локалната функция с индекс i и s_{i1} е крайната параметрична стойност. Тогава имаме следните Ермитови интерполационни свойства за Бета-функция В-сплайн функцията.

Теорема 5.1. Нека редицата от функции $c_k : [s_{k0}, s_{k1}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, където $1 \leq d < \infty$, принадлежи на $\mathfrak{F}(B_k)$. Нека

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \circ \omega_k(t) B_k(t) \quad (5.6)$$

е обобщената БФБС d -размерна векторна функция, дефинирана чрез вектора от възли $\{t_k\}_{k=0}^{n+1}$ и локалните векторни функции $c_k(s)$, $k = 1, \dots, n$. Означаваме глобалния/локален "скалиращ" фактор чрез

$$\delta_k = \frac{s_{k1} - s_{k0}}{t_{k+1} - t_{k-1}}, \quad \text{за } k = 1, 2, \dots, n.$$

Ако свойствата в Теорема 3.1 за изпълнени, то

$$D^j f(t_k) = \delta_k^j D^j c_k \circ \omega_k(t_k), \quad \text{за } j = 0, 1, 2, \dots, i_k \text{ и } k = 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Доказателство. Изчислявайки производната на (5.6) относно t имаме

$$Df(t) = \sum_{k=1}^n (D(c_k \circ \omega_k)(t) B_k(t) + c_k \circ \omega_k(t) D B_k(t)).$$

От $B_k(t_k) = 1$ (свойство **C1**(a) в Теорема 3.1), $B_k(t_j) = 0$, когато $j \neq k$ (свойство **C2**) и $D^j B_k(t_k) = 0$ за всяко $j = 1, \dots, i_k$ (свойство **C1**((d1).1)), следва че

$$\begin{aligned} Df(t_k) &= D(c_k \circ \omega_k)(t) \\ &= \delta_k D c_k \circ \omega_k(t). \end{aligned}$$

Тъй като

$$D(D^j c_k \circ \omega_k)(t) = \delta_k D^{j+1} c_k \circ \omega_k(t),$$

то следва израз (5.7). С това свърша доказателството. \square

Забележка 5.2. Типична ситуация е когато домейна на локалната функция е скалиран до стандартния "единичен" домейн. За пример кривите на Безие имат домейн, където $s_{k1} - s_{k0} = 1$. Ако комбинираме този единичен домейн с унифициран вектор от възли (uniform knot vector), където $t_{k+1} - t_{k-1} = 1$ за $k = 1, \dots, n$, то скалиращия фактор δ_k^j за $k = 1, \dots, n$ и за $j = 1, 2, \dots, i_k$ може да не се взема на предвид, което е много подходящо при практическа употреба. При всички други случаи е важно да не забравяме тези скалиращи фактори.

БФБС функцията точно интерполира стойностите на локалните ѝ функции в техните съответни възли. Тя също точно интерполира производните на нейните локални функции до i_k ред в техните съответни възли t_k , $k = 1, \dots, n$, където i_k е дадено в Определение 3.1 Тези два факта увеличават възможността за апроксимация на функция/крива/повърхнина/др. чрез използване аналогично на локални функции/криви/повърхнини/др., което от друга страни ни позволява Ермитова интерполация на оригиналната функция в съответния вътрешен възел. Следователно Ермитовото интерполационно свойство дава следните възможности за конструкция на Бета-функция В-сплайн функция:

- Като входни параметри имаме дадени функция $g(x)$, която ще интерполираме, и строго нарастващ вектор $\{x_k\}_{k=1}^n$ от параметрични стойности, указващи интерполационните възли.

- Сега можем да построим вектор $\{t_k\}_{k=0}^{n+1}$, където

$$- t_k = x_k, \text{ за } k = 1, \dots, n,$$

$$- t_0 = x_1,$$

$$- t_{n+1} = x_n.$$

Ако $g(t)$ е периодична, то $t_0 = x_1 - (x_n - x_{n-1})$ и $t_{n+1} = x_n + (x_1 - x_0)$.

- Следващата стъпка е да изберем типа на локалните функции, включително и локалния домейн и броя на производните d_k , които ще използваме.
- Генерираме $\{i_k\}_{k=1}^n$ такива, че $i_k \geq d_k$, където i_k е дадено в Определение 3.1 и d_k са дадени по-долу.
- Накрая генериране локалните функции c_k чрез Ермитова интерполация,

$$D^j c_k \circ \omega_k(t_k) = \left(\frac{t_{k+1} - t_{k-1}}{s_{k1} - s_{k0}} \right)^j D^j g(x_k), \quad \text{за } j = 0, 1, \dots, d_k,$$

където d_k е предварително зададения ред на Ермитова интерполация в k -тия възел.

Това е примерен алгоритъм за реализация на Ермитова интерполация на криви в 2D чрез използване на Бета-функция В-сплайна. Специфичното при него е генерирането да допълнителен вектор от цели числа $\{i_k\}_{k=1}^n$, наречени кратности.

Всяка кратност съответства на възел от контролния полигон. Кратностите могат да бъдат различни за всеки възел. Тези числа са зависими от реда на Ермитовата интерполация във възела, на който съответстват, за да имаме непрекъснатост и гладкост, те трябва да са поне равни на реда на Ермитовата интерполация в съответния възел. Производната $D^{i+1}B_k(t)$, $l = k - 1, k, k + 1$, на БФС базисната функция е прекъсната (от първи тип) в $t = t_l$ (виж свойство С4(22) в Теорема 3.1).

Глава 6

Параметрични криви в 3D

В тази глава ще обсъдим интерполацията на параметрични криви в 3D чрез използването на Бета-функция В-сплайн.

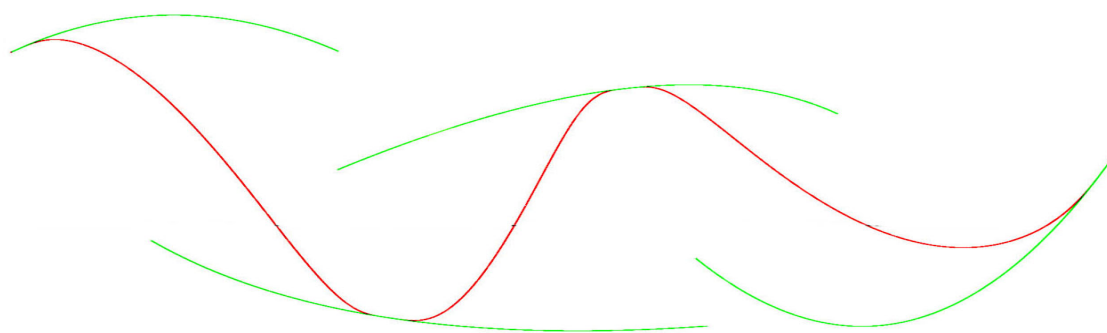
Част 6.1 е въведение в темата относно параметрични криви в 3D. В част 6.3 ще коментираме дефиницията и имплементацията на "отворени/затворени" криви. В част 6.2 ще дискутираме изчислението на БФБС кривата, включително нейните производните. След това в част 6.4 ще изследваме криви на Безие като локални криви, включително Ермитова интерполация.

6.1 Бета-функция В-сплайн криви

Общата формула на Бета-функция В-сплайн крива е

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) B_i(t), \quad (6.1)$$

където $c_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, са локални криви и $B_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, са БФБС базисните функции. Тук $c_i(t)$ са полиномиални криви от съответна степен, която може да варира от възел до възел. Както може да се види, формулата е подобна на формулата на обикновената полиномиална В-сплайн крива с изключение на това, че $c_i(t)$ не са точки, а криви. Следователно Бета-функция В-сплайните

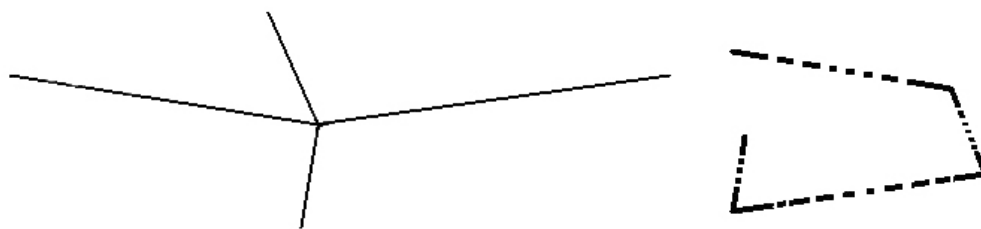


Фигура 6.1: Приблизителна 'глобална' Бета-функция В-сплайн крива $f(t)$ (червено) с четири локални крива (зелено). Глобалната крива се получава като линейна комбинация на локалните ѝ криви с Бета-функция В-сплайните. Глобалната крива също интерполира всички съществуващи производни на всяка от съседните локални крива в "средния" възел до съответната кратност.

могат да се разглеждат като допирателни на локални криви. Фигура 6.1 показва пример на крива и нейните локални допирателни криви.

Преди да изследваме различни типове локални криви, ще ни е необходим коментар как ще изглежда кривата, ако използваме точки като коефициенти, както при обикновените В-сплайни.

Забележка 6.1. Ако заменим локалните криви с точки, крайната крива геометрично ще изглежда като частично линейна крива с безкрайно гладка параметризация (при строго нарастващ вектор от възли) и $D^j B_k(t_l) = 0$ (основно свойство 6, виж Теорема 3.1) предполага, че всички производни на f трябва да са нули във всеки възел: $D^j f(t_l) = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$, $s = \min_{k=1, \dots, n} i_k$, $l = 1, \dots, n$, където i_l е дефинирано спрямо Определение 3.1 (това е показано в дясната част на Фигура 6.2). Следва, че всички производни от по-висока степен (вектори) трябва да са успоредни на кривата (линия), а следователно и на първата производна. Следователно всички производни на f ще образуват геометрично 'звезда' съсредоточена в началото (виж лявата част на Фигура 6.2).



Фигура 6.2: Локалните криви са заменени в точки. Крайната крива е в дясната част. Кривата е нарисувана с точки, за да се покаже "скоростта" (*denser is slower*). Звездата, от лявата страна, е диаграма на производните центрирани около началото.

В Определение 5.1 е дадена класификация на локални функции запазващи основните свойства, т.е C^∞ свойството. За векторни функции (параметрични криви), ограниченията на локалната функция могат да се обобщят в следната забележка.

Забележка 6.2. По принцип, единственото ограничение при избора на локална крива $c_i(t)$ е, че всеки от свързаните компоненти на $c_i(t)$ (които са скаларни функции) принадлежи на $\mathfrak{F}(B_i)$ (Определение 5.1).

6.2 Стойност и производни на БФБС кривата

Можем да дадем прост израз за изчисление на производните на БФБС кривата като използваме правилото на Лайбниц:

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} \cdot g^{(k-j)},$$

имаме

$$c^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} c_i^{(j)}(t) B_i^{(k-j)}(t).$$

Нека дадем матрично представяне на БФБС кривата. Имаме

$$c(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) B_i(t), \quad (6.2)$$

където

$$c_k(t) = \sum_{\mu=0}^{i_k-1} c_\mu t^\mu \quad (6.3)$$

е полиномиална локална крива.

Ще презапишем това равенство (6.3), като използваме формулата на Тейлър,

$$c_k(t) = \sum_{\mu=0}^{i_k-1} \frac{1}{\mu!} c_k^{(\mu)}(t_k) (t - t_k)^\mu \quad (6.4)$$

Сега можем да запишем $c_k(t)$ в матрична форма с използването на мономиален базис,

$$c_k(t) = C (M_{i_k,k}(t)), \quad (6.5)$$

където

$$C = \left(c_k^{(\mu)}(t_k) \right)$$

е вектор стълб с размерност i_k и има елементи, които са също вектори с всичките производни на $c_k(t)$ до ред $i_k - 1$ във възела t_k .

$M_{i_k,k}(t)$ е вектор ред представящ мономиалния базис центриран около t_k ,

$$M_{i_k,k}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(t-t_k)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{(t-t_k)^{i_k-1}}{(i_k-1)!} \end{pmatrix},$$

Нека направим смяна на базиса от мономиален в Бернщайнов базис

$$M_{i_k,k}(t) = A_k Br_{i_k,k}(t).$$

Сега можем да запишем (6.5) в Бернщайнов базис:

$$c_k(t) = C A_k Br_{i_k,k}(t), \quad (6.6)$$

където A_k е матрицата на смяната между двата базиса и е с константни коефициенти. $Br_{i_k,k}$ е матрицата на Бернщайнов базис.

Матричното представяне на БФБС кривата, дадена в (6.2), е

$$c(t) = (c_k(t)) (B_n(t)), \quad (6.7)$$

където B_n е вектор-ред с елементи всички БФБС базисни функции $B_k(t)$, $k = 1, \dots, n$.

Накрая получаваме следното матрично представяне на БФБС кривата

$$c(t) = C A_k B_{r_{i_k,k}}(t) B_n(k) \quad (6.8)$$

6.3 Определение/имплементация на "отворени" и "затворени" криви

За БФБС дефиницията и имплементацията на 'отворени' криви и 'затворени' криви (виж [13] за случая на обикновени полиномиални В-сплайни) са аналогични с ЕРБС (виж [12], Глава 4: *Curves*, Част 1: *Definition/implmentation of "open/-closed" curves*), с единствената разлика: на границите на 'отворените' и 'затворените' криви съответния брой на Ермитови интерполационни условия е ограничен от i_0 и i_n .

6.4 Криви на Безие като локални криви

Теорията на този вид локални полиномиални криви в случай на БФБС е същата като при ЕРБС (виж [1] и [12]), с допълнителното ограничение за БФБС, че степента на Бернщайн базиса за локалните криви на Безие не може да превишава i_k в интервала $[t_{k-1}, t_{k+1}]$. За яснота тук е дадено стандартното обяснение. Нашето описание следва [12], Глава 4: *Curves*, Част 3: *Bézier curves as local curves*.

Като цяло е много удобно кривите на Безие да се ползват като локални криви. Кривите на Безие се дефинират от:

$$c(t) = \sum_{i=0}^d c_i b_{d,i}(t), \quad \text{ако } 0 \leq t \leq 1, \quad (6.9)$$

където основните функции са полиномите на Бернщайн.

$$b_{d,i}(t) = \binom{d}{i} t^i (1-t)^{d-i},$$

и където $c_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, d$ са съответно коефициенти и контролния полигон (control polygon), d е полиномната степен, и n обикновено е 2 или 3 (но може да бъде всякакво цяло положително число).

Съществуват три различни алгоритъма за изчисление на (6.9) използвани за Безие криви:

- i) алгоритъм на Де Кастельо,
- ii) алгоритъм на Кокс/Де Бур,
- iii) директно изчисление на полиномите на Бернщайн.

За по-специфични степени предварително изчислените полиноми на Бернщайн дават най-бързия алгоритъм, но като цяло версията на Кокс/Де Бур е най-гъвкавия и не по-малко бърз алгоритъм. Все пак тук не се засяга изчисляването на криви на Безие, тъй като това е добре познато и разглеждано много пъти досега. От друга страна ще се разгледа по-особен алгоритъм за пресмятане и интерполации на Ермит за локални криви когато тези криви са криви на Безие.

За пресмятането и интерполацията на Ермит (ще бъдат разгледани по-късно) ще бъде използвана обобщената матрица на Бернщайн/Ермит (интерполационни матрици са разглеждат в [15])

$$\mathbf{B}_d(t, \delta) = \begin{pmatrix} b_{d,0}(t) & b_{d,1}(t) & \dots & b_{d,d}(t) \\ \delta D b_{d,0}(t) & \delta D b_{d,1}(t) & \dots & \delta D b_{d,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^d D^d b_{d,0}(t) & \delta^d D^d b_{d,1}(t) & \dots & \delta^d D^d b_{d,d}(t) \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Особеност на тази матрица (6.10) е скалиращия фактор δ^j , където j , степенния показател, е номера на реда (първият ред е означен с 0). Причината за това скалиране ще бъде обяснена по-късно. В интерполацията на Ермит $\delta = 1$. Сега ще бъде представен алгоритъма за изчисление на обобщената версия на матрицата. По-късно ще се разгледа как да бъде използвана.

Първо, разглеждаме друга матрица: $\mathbf{T}(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$, дефинирана в алгоритъма на Де Кастельо. Тя е ограничена по ранг диагонална матрица, обикновено до

две, и с елементи $1 - t$ и t на ненулевите диагонали.

Сега може да разглеждаме матричното представяне за крива на Безие от n -ти ред:

$$c(t) = T_1(t)T_2(t) \dots T_n(t)C, \quad (6.11)$$

където индексите $1, 2, \dots, n$, означават номерата на редовете в съответната матрица T_i , $i = 1, \dots, n$. Производната на тази крива се определя от следната формула

$$\begin{aligned} c^{(k)}(t) &= n(n-1) \dots (n-k+1) T_1(t)T_2(t) \dots T_{n-k}(t) T'_{n-k+1}T'_{n-k+2} \dots T'_n C \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \prod_{i=1, k < n}^{n-k} T_i(t) \prod_{j=n-k+1}^n T'_j(t) C, \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Производната на матрицата $T_i(t)$, означена като T'_i , $i = 1, \dots, n$, е матрица независима от t и е диагонална матрица с размер на диагонала две, и елементи -1 и 1 .

Следните уравнения са пример за (6.11) за крива на Безие от 3-та степен и трите и производни в матрична форма.

$$\begin{aligned} c(t) &= T_1(t)T_2(t)T_3(t) C, \\ c'(t) &= 3 T_1(t)T_2(t) T'_3 C, \\ c''(t) &= 6 T_1(t) T'_2T'_3 C, \\ c'''(t) &= 6 T'_1T'_2T'_3 C, \end{aligned}$$

Ако се изведат тези уравнения се получава следното матрично представяне за

крива на Безие от 3-та степен и трите ѝ производни:

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

$$c'(t) = 3 \begin{pmatrix} 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

$$c''(t) = 6 \begin{pmatrix} 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

$$c'''(t) = 6 \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Лесно се вижда, че:

- i) Ако изчисляваме от дясната страна (пренебрегвайки нулите) получаваме алгоритъма на Де Кастельо..
- ii) Ако изчисляваме от лявата страна получаваме алгоритъма на Кокс/Де Бур.
- iii) Ако умножим матриците от лявата страна с коефициентния вектор от дясната страна получаваме полиномите на Бернщайн и техните производни.

В част 5.3 бяха разгледани свойствата на интерполацията на Ермит. Ако областта на кривата на Безие е скалиран, както е нормата, поради глобалното/локално афинно изображение (виж (5.4) в Определение 5.3), то, за да изчислим например локалната Безие крива $c_i(t)$, j -тата производна трябва да бъде скалирана с

глобалният/локален "скалиращ фактор" δ_i^j където

$$\delta_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad (6.13)$$

както е описано в Теорема 5.1. Числителят в дробта е 1 защото областта на кривите на Безие е $[0, 1]$. Тъй като матрицата (6.10) се използва в интерполациите на Ермит и в изчисляването на локални криви, тя трябва да включва скалирането, както беше описано преди. Оттук се получава алгоритъма за образуването на матрицата $\mathbf{V}_d(t, \delta)$ описана в (6.10).

В този раздел бе разгледан подробно пример за кубична крива на Безие.

Описанието важи за съответното матрично представяне на крива на Безие от всяка степен (съответно размера на най-голямата матрица в матричното представяне). Единствената разлика между случаите на БФБС и ЕРБС е, че в нашия случай тази степен или размер на най-голямата матрица, не могат да превишават i_k , докато в случая на ЕРБС няма ограничения.

6.4.1 Локални криви на Безие и интерполация на Ермит

Интерполацията на Ермит при БФБС е също аналогична с тази на ЕРБС със съответни ограничения за реда на интерполацията във възлите. Обяснението следва [12], Глава 4: *Curves*, Част 3.1: *Local Bézier curves and Hermite interpolation*, със съответни изменения отнасящи се до кратността i_k във възела t_k , $k = 1, \dots, m$.

От условията в част 5.3, приложени към БФБС кривите се получава следното:

- Дадена е крива $g(t)$, $g : [t_{start}, t_{end}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, където може да имаме $n = 1, 2, 3, \dots$,
- Даден е брой стойности $m > 1$, и брой производни $\{d_i\}_{i=1}^m > 0$ във всяка от точките използвани в интерполацията.
- Създаваме възлов вектор чрез:
 - първо определяме $t_1 = t_{start}$,

- след това определяме $t_m = t_{end}$.
- Тогава за $i = 2, 3, \dots, m - 1$ генерираме t_i такива, че $t_{i-1} < t_i$, и където $t_{m-1} < t_m$.
- Накрая, t_0 и t_{m+1} трябва да бъдат нагласени според правилата за отворени/затворени криви.
- Образоваме вектор от цели числа $\{i_k\}_{k=1}^m, i_k \geq d_k$.
- Образоваме БФБС крива използвайки възловия вектор $\{t_i\}_{i=0}^{m+1}$, и създаваме локални криви по такъв начин, че локалната БФБС крива интерполира $\{D^j g(t_i)\}_{j=0}^{d_i}$, за $i = 1, \dots, m$.

Това прилича на нагаждане на основния интерполационен метод на Ермит, използван за образуване на апроксимация на крива. Специфично е образуването на локалната крива. Първо, дефиниционната област на кривата на Безие е $[0, 1]$. После от Теорема 5.1 имаме (в съответствие с локалната дефиниционна област на кривите на Безие):

$$D^j f(t_i) = \delta_i^j D^j c_i \circ \omega_i(t_i), \quad \text{за } j = 0, 1, 2, \dots \text{ и } i = 1, \dots, m,$$

където $f(t)$ е БФБС кривата, $c_i(t)$ са криви на Безие, и

$$\omega_i(t_i) = \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

е глобалното/локалното изображение (global/local mapping) от Определение 5.3,

и

$$\delta_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, m,$$

е глобалния/локалния коефициент на нарастване (global/local scaling factor) на областта определена в Теорема 5.1. Това показва че БФБС кривата е нагласена от скалиращия фактор (коефициента на нарастване) на областта, интерполиращ локалната крива $c_i(t)$ за всички производни във възела t_i за $i = 1, \dots, m$. Оттук се получава уравнението за интерполациите на Ермит за локална крива на Безие с индекс i :

$$D^s g(t_i) = D^s f(t_i) = \delta_i^s D^s c_i \circ \omega_i(t_i) = \delta_i^s \sum_{j=0}^{d_i} c_{i,j} D^s b_{d_i,j} \circ \omega_i(t_i), \quad \text{за } s = 0, \dots, d_i$$

Това може да се формулира във векторна/матрична форма,

$$\mathbf{B}_{d_i}(\omega_i(t_i), \delta_i) \mathbf{c}_i = \widehat{\mathbf{g}}_i \quad (6.14)$$

където $\mathbf{B}_{d_i}(\omega_i(t_i), \delta_i)$ е матрицата на Бернщайн/Ермит описана в уравнение (6.10), а

$$\mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} c_{i,0} \\ \vdots \\ c_{i,d} \end{pmatrix}$$

са коефициентите на локалните криви на Безие с индекс i , а

$$\widehat{\mathbf{g}}_i = \begin{pmatrix} D^0 g(t_i) \\ \vdots \\ D_i^d g(t_i) \end{pmatrix}$$

е вектор, който е типичен резултат от изчислението на основна параметризирана крива.

Последната стъпка в образуването на локални криви на Безие е решаването на уравнение (6.14) относно коефициентите на Безие \mathbf{c}_i ,

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{B}_{d_i}(\omega_i(t_i), \delta_i)^{-1} \widehat{\mathbf{g}}_i. \quad (6.15)$$

Заключението, е че за да се пресметне коефициент на локални криви на Безие (6.15) първо трябва да се пресметне разширената матрица на Бернщайн/Ермит, след което да се намери обратната матрица и да се умножи с "изчислителния" вектор на оригиналната крива. Сега няма да се разглежда обръщането на матрица, но има много програмни библиотеки съдържащи ефективни алгоритми за обръщане на матрица, виж за пример [16].

По определени причини предимство е да се намерят всички коефициенти след пресмятането на (6.15), така че интерполационната точка да е "в локалното начало". Тогава трябва да се извади $g(t_i)$ от всички коефициенти в контролния полигон (control polygon) \mathbf{c}_i на локалната крива на Безие и после това трябва да се елиминира като се вмъква противоположно движение към графичната

хомогенна матрична система. Под "хомогенна матрица" се разбира, че координатите, дадени в матрицата, са хомогенни. Условието разбира се е, че тази хомогенна матрична система участва в общото изчисление.

Глава 7

Заклучение

С тази дипломна работа представихме един нов вид В-сплайн функция – Бета-функция В-сплайн. Също така дадохме основната формула за изчисляване на В-сплайн базисните функции и пресметнахме тази формула в няколко различни базиса. Успяхме да формулираме и докажем някои важни свойства на Бета-функция В-сплайна и да представим интерполацията на криви.

Като бъдеща разработка може да се развие теорията за интерполация на различни повърхнини (повърхнини, получени като тензорни произведения, повърхнини на Гордън, дву- и три-аргументни Булеви суми и др.) и триангулации. Също така ще бъде интересно да се направи компютърно приложение, ползващо БФБС за интерполация на криви и повърхнини. Пример за това може да бъде видян в [11] – дипломна работа, представена и разработена в университета в Нарвик, Норвегия от Недялка Делистоянова и Ивана Ганчева, под ръководството на проф. Любомир Т. Дечевски.

Списък на фигурите

2.1	Графика на k -ти В-сплайн $N_{k,2}$ от 2ра степен (3ти ред).	5
2.2	Частично константен В-сплайн. Този В-сплайн е от 1-ви ред и фигурата ясно показва, че е прекъснат във възлите.	8
2.3	Частично линеен В-сплайн – 2-ри ред сплайн. Виждаме, че В-сплайн е непрекъснат във възлите, но не е диференцируем. . . .	8
2.4	Гладък В-сплайн от 4-ти ред. По-високата степен на В-сплайна му позволява непрекъснатост и диференцируемост във възлите. .	9
2.5	Примери на полиномиални В-сплайни от 4-ти ред с кратни възли. На изображение (а) виждаме получаването на 'ръбче' при възел с кратност 3. На изображения (b) и (c) имаме възел с кратност 4 и сплайн е прекъснат, защото кратността на възела е по-голяма от степента на В-сплайна.	10
2.6	Графика на ЕРБС базисна функция $B_k(t)$ (плътно червено) и неговата първа производна (син пунктир). Възлите t_{k-1}, t_k и t_{k+1} са също отбелязани на графиката.	12
2.7	Графика на k -та ЕРБС базисна функция B_k	16
2.8	Графики на ЕРБС базисна функция с 1ви(а), 2ри(b) и 3ти(c) ред на непрекъснатост.	16
4.1	Нулеви и ненулеви стойности, зависещи от коефициента $C_{k;l,\mu}$, ((4.20),(4.21),(4.22) и (4.23)). $f(l)$ е начертана в червено, а $g(l)$ – в синьо.	39

- 5.1 Приблизителна 'глобална' Бета-функция В-сплайнова функция $f(t)$ (синьо) с четири скаларни коефициента $\{c_i\}_{i=1}^4$ (зелено). Глобалната функция е линейна комбинация на коефициентите с Бета-функцията В-сплайните $\{B_i(t)\}_{i=1}^4$ (червено). Глобалната функция интерполира коефициентите, а всички производни до ред i_k са нули във всеки възел t_k . Векторът от възли $\{t_i\}_{i=0}^5$ също е маркиран и има многократни възли в двата края (непрекъснатост, показана в част 5.2). 48
- 5.2 Приблизителна 'глобална' Бета-функция В-сплайн функция $f(t)$ (синьо) с четири локални функции $\{l_i(t)\}_{i=1}^4$ (зелено). Глобалната функция е линейна комбинация на локалните функции с Бета-функцията В-сплайните $\{B_i(t)\}_{i=1}^4$ (червено). Глобалната функция също интерполира всички съществуващи производни на всяка от съседните локални функции в съответния възел t_k , до ред i_k . Векторът от възли $\{t_i\}_{i=0}^5$ също е маркиран и има многократни възли в двата края (непрекъснатост, показана в част 5.2). 50
- 6.1 Приблизителна 'глобална' Бета-функция В-сплайн крива $f(t)$ (червено) с четири локални крива (зелено). Глобалната крива се получава като линейна комбинация на локалните й криви с Бета-функция В-сплайните. Глобалната крива също интерполира всички съществуващи производни на всяка от съседните локални крива в "средния" възел до съответната кратност. 57
- 6.2 Локалните криви са заменени в точки. Крайната крива е в дясната част. Кривата е нарисувана с точки, за да се покаже "скоростта" (denser is slower). Звездата, от лявата страна, е диаграма на производните центрирани около началото. 58

Исползвана литература

- [1] L. T. Decevsy, A. Lakså, B. Bang. Expo-Rational B-splines. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 27(3):319–369, 2006.
- [2] L. T. Decevsy, A. Lakså, B. Bang. NUERBS form of Expo-Rational B-splines. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 32(1):11–32, 2006.
- [3] L. T. Dechevsky, A. Lakså, B. Bang. NUERBS form of Expo-Rational B-splines. Preprint 2/2004, Narvik University College, Narvik, Norway, 2004.
- [4] A. Lakså, B. Bang, L. T. Dechevsky. Exploring Expo-Rational B-splines for Curves and Surfces. In M. Dæhlen, K. Mørken, and L. Schumaker, editors, *Mathematical methods for Curves and Surfaces*, pages 253–262. Nashboro Press, 2005.
- [5] L. T. Dechevsky, B. Bang, Xian Feng Bu, and A. Lakså. Variational calculus and multigrid dynamical programming on exporational surfaces and volume deformations: theory and applications. *Fourth International Conference on Multivariate Approximation: Theory and Applications*, 2007.
- [6] L. T. Dechevsky, A. Lakså, and B. Bang. Expo-Rational B-splines. Preprint 1/2005, Narvik University College, Narvik, Norway, 2005.
- [7] Lubomir Dechevsky, Arne Lakså, and Borre Bang. Freeform design, Generalized Expo-Rational B-Splines. *Fourth International Conference on Multivariate*

-
- Approximation: Theory and Applications*, 2007.
- [8] Lubomir T. Dechevsky. Expo-rational B-splines of a complex variable and their applications. *Fourth International Conference on Multivariate Approximation: Theory and Applications*, 2007.
- [9] G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD*. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, fifth edition, 2002.
- [10] Gerald Farin. *A History of Curves and Surfaces in CAGD*. 2002.
- [11] Nedyalka Delistoyanova, Ivana Gancheva. Euler Beta-function B-splines: Definition, Basic properties and Practical use in Computer-Aided Geometric Design. Master's thesis, Narvik Univeristy College, Norway, 2007.
- [12] Arne Lakså. *Basic properties of Expo-Rational B-splines and practical use in Computer Aided Geometric Design*. PhD thesis, University of Oslo, Narvik, Norway, 2006.
- [13] Michael Mortenson. *Geometric Modeling*, volume 2. John Wiley and Sons, 1997.
- [14] Martin Kilian, Torsten Mohs, Raphael Straub, Claudia Bangert, Hartmut Praufzsch. CAGD - an interactive tutorial on geometric modeling. <http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html>, 2007. [Online; accessed June-2007].
- [15] L. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. A Wiley-interscience publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1981.
- [16] Wikipedia. Basic Linear Algebra Subprograms — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 27-June-2007].

Азбучен указател

- БФБС, 30, 46, 49, 52, 60, 64
- БФБС базисна функция, 56
- БФБС крива, 58–60, 65
- БФБС функция, 47
- Бернщайнов базис, 30, 33, 45, 59
- Бернщайнов полином, 33
- Бета функция на Ойлер, 18
- Бета-функция В-сплайн, 1, 19, 20, 46, 51, 52
- Бета-функция В-сплайн крива, 56
- Бета-функция В-сплайн функция, 49
- Гама функция, 32
- Де Кастельо, 63
- ЕРБС, 11, 12, 25, 30, 52, 60, 64
- Експо-Рационален В-сплайн, 52
- Експо-рационален В-сплайн, 11
- Ермитова интерполация, 52
- Ермитовите интерполационни свойства, 52
- Кокс/Де Бур, 63
- Разбиване на единицата, 23
- алгоритъм на Де Кастельо, 61
- алгоритъм на Кокс/Де Бур, 61
- афинна комбинация, 15, 23
- афинно глобално/локално изображение, 51
- афинно изображение, 47
- базисна функция, 46, 47, 56, 60
- бета функция на Ойлер, 32
- биномиална теорема, 38
- вектор от възли, 6, 12, 19
- възел, 6
- глобален домейн, 51
- глобален мономиален базис, 37
- глобален/локален скалиращ фактор, 53, 64
- глобално/локално афинно изображение, 63
- гърбовидна функция, 17
- диагонална матрица, 61
- забележка, 21, 25, 29, 49, 53, 57, 58
- затворена крива, 60
- изображение, 51
- изпъкнала комбинация, 15
- изчисление, 31, 33, 37, 43, 45
- интервал от възли, 13, 15

- камбановидна форма, 13
- компактен носител, 8
- контролен полигон, 61, 66
- кратен възел, 6
- кратност на възел, 52
- крива на Безие, 60, 62, 65, 66
- криви, 46, 56
- лема, 21, 22
- линейна комбинация, 6
- локален мономиален базис, 43
- локален носител, 7, 15, 49
- локална крива, 56, 65
- локална функция, 47, 49
- локално начало, 66
- матрица на Бернщайн/Ермит, 61, 66
- матрица на Бернщайнов базис, 59
- минимален носител, 5
- надеждност на изчислението, 30
- нарастване размера на носителя, 9
- неунифициран вектор от възли, 6, 30
- обратна матрица, 66
- обръщане на матрица, 66
- общо изчисление, 67
- определение, 12, 17, 19, 20, 49, 51
- основни свойства, 23, 58
- отворена крива, 60
- подинтервал, 6
- полином на Бернщайн, 61
- производна, 27, 28, 54, 57, 59, 62, 64
- прост възел, 6
- разбиване на единицата, 17, 49
- размер на носителя, 15
- рекурсивна формула на Кокс/Де Бур,
6
- скалиращ фактор, 14, 61
- скалиращ фактор на област, 65
- следствие, 28
- строго нарастващ, 54
- теорема, 23, 53
- унифициран вектор от възли, 6, 53
- формула на Тейлър, 59
- функционално пространство, 49
- хомогенна матрица, 67
- частично полиномиална функция, 49